R

F 1509/M

49. 1987.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITATEA POLITEHNICA BUCUREȘTI

SERIA MECANICĂ

TOMUL XLIX, ANUL 1987

COMITETUL DE REDACȚIE

REDACTOR RESPONSABIL : Prof. dr. ing. *Voicu Tache*
MEMBRII : Prof. dr. ing. *Constantin Bălă*; Conf. dr. ing. *Cornel Berbente*; Prof. dr. docent *Gheorghe Buzdugan*, membru corespondent al Academiei R. S. România; Prof. dr. ing. *Ioan Carabogdan*; Prof. dr. ing. *Sergiu Călin* (secretar științific); Prof. dr. docent *Virgil Constantinescu*; Prof. dr. docent *Felicia Cornea*; Prof. dr. ing. *Alexandru Dănescu*; Prof. dr. docent *Traian Demian* (redactor responsabil adjunct); Prof. dr. ing. *Octavian Floarea*; Prof. dr. ing. *Julieta Florea*; Prof. dr. ing *Nicolae Geru*; Prof. dr. ing. *Berthold Grünwald*; Prof. dr. *Ion Grădișteanu*; Prof. dr. ing. *Gheorghe Hortopan*; Prof. dr. ing. *Moise Ienciu*; Prof. dr. ing. *Vlad Ionescu*; Prof. dr. ing. *Adelaida Mateescu*; Prof. ing. *Jean Moncea*; Prof. dr. ing *Nicolae Murguleț*; Prof. dr. docent *Florea Oprea*; Prof. dr ing. *Aurel Oprean*; Prof. dr ing. *Mircea Petrescu*; Prof. dr. ing. *Ion Popescu*; Conf. dr. ing. *Mircea Radeș*; Conf. dr. ing. *Sorin Rosca*; Prof. dr. ing *George Rulea*; Prof. dr. ing. *Marcel Segărceanu*; Prof. dr. ing. *Alexandru Spătaru*; Prof. dr. *Octavian Stănășilă*; Prof. dr. docent *Ion Teoreanu*; Prof. dr. docent *Andrei Țugulea*; Prof. dr. ing. *Silvia Vacu*; Prof. dr. docent *Rodica Vilcu*; Academician *Radu Voinea*.

Editor: Institutul Politehnic București
Splaiul Independenței 313, Tel. 31.40.10. România, Căsuța poștală 2356

Readers from abroad can get subscriptions for this newspaper through ROMPRESFILATELIA, Import export press, P.O. Box 12-201, Telex 10378, Calea Griviței 62—64, Bucharest, ROMANIA

Sumar

Gh. Mocică

Asupra soluției generale a unei ecuații diferențiale liniare de tip Bessel 3

V. Buzilă, Doina Iordache

Generarea corpurilor conice de secțiune transversală cunoscută 9

T. Demian, S. Kostrachievici

Încercări privind lagărele cilindrice radiale din aparate, cu lubrifiație ferofluidică 19

D. Voiculescu, I. Magheți

Unele aplicații ale ecuațiilor lui Lagrange în studiul sistemelor acustice 25

C. Micu, I. Curița

Determinarea relațiilor tensiunilor cauzate de acțiunea unei sarcini concentrate în planul limită al semispațiului (I. engleză) 35

V. Drobotă

Calculul reductoarelor cutiilor de viteze și transmisiilor supuse la solicitarea de răsucire prin șoc 47

M. Munteanu

Metoda de calcul aproximativ al deformațiilor și tensiunilor într-o placă sub acțiunea unei ciocniri transversale 59

T. Turcoiu, D. Nedelcu, N. Apostolescu

Asupra unui echipament pentru introducerea hidrogenului în cilindrul motorului cu aprindere prin comprimare (partea I) 71

D. Robescu, T. Petrovici

Asupra ecuației de continuitate la curgerea amestecurilor polifazice cu aplicație la curgeri prin instalații de epurare a apelor 79

Mihaela Păunescu, R. Iatan, C. Tacă

Aspecte privind durata de viață a unui recipient sub presiune, cu abateri de la forma geometrică 87

Gh. Ene, R. Iatan

Cercetări teoretice și experimentale privind dinamica sitelor cu mișcare de ruliu . . 93

Summary

Gh. Mocică

On the General Solution of a Differential Equation of Bessel Type 3

V. Buzilă, Doina Iordache

The Generation of the Conical Surfaces when th Sectional Area Is Known 9

T. Demian, S. Kostrakievici

Stand Used to Study the Radical Cylindrical Bearings with Ferofluidic Self-Lubrification 19

D. Voiculescu, I. Magheţi

Some Applications of Lagrange Equations Studying the Acoustic Systems 25

C. Micu, I. Curiţa

Determination of Expressions for the Stresses Caused by a Tangential Concentrated Force Acting in the Boundary Plane of the Half-Space 35

V. Drobotă

Calculation of Stresses and Angular Displacements in Shock Loaded Shafts of Gear Boxes and Power Transmissions 47

M. Munteanu

Approximative Calculus Method of the Deformation and the Stresses in a Plate under the Action of a Transversal Impact 59

T. Turcoiu, D. Nedelcu, N. Apostolescu

Concerning a Hydrogen Injection in the Diesel Engine Cylinder 71

D. Robescu, T. Petrovici

The Continuity Equation for Multiphase Turbulent Flow 79

Mihaela Păunescu, R. Iatan, C. Tacă

Aspect Concerning the Life Limit of a Pressure Vessel with Dimensional Discrepancy 87

Gh. Ene, R. Iatan

Theoretic and Experimental Researches on the Dynamic of the Rolling Screens . . . 93

15 09 17

C.Z. :517.43

ASUPRA SOLUȚIEI GENERALE A UNEI ECUAȚII DIFERENȚIALE LINIARE DE TIP BESSEL

GH. MOCICĂ*

În lucrare se arată că soluția generală a ecuației

$$z^4w^{IV} + 2z^3w''' - (2\nu^2 + 1)z^2w'' + (2\nu^2 + 1)zw' + (\nu^4 - 4\nu^2 - z^4)w = 0, \quad \nu \in \mathbb{C}$$

este

$$w(z) = AJ_\nu(z) + BY_\nu(z) + CI_\nu(z) + DK_\nu(z)$$

1. **Notații.** J_ν și Y_ν sînt funcțiile lui Bessel de prima și a doua speță și de indice ν soluții particulare liniar independente ale ecuației lui Bessel

$$z^2w'' + zw' + (z^2 - \nu^2)w = 0, \qquad \nu \in \mathbb{C}; \tag{1}$$

I_ν și K_ν sînt funcțiile lui Bessel modificate de prima și a doua speță și de indice ν soluții particulare liniar independente ale ecuației lui Bessel modificată

$$z^2w'' + zw' - (z^2 + \nu^2)w = 0. \tag{2}$$

2. **Propoziția 1:** Funcțiile lui Bessel J_ν, Y_ν, I_ν, K_ν sînt liniar independente.

Demonstrație. Din ecuația lui Bessel (1) verificată de funcțiile J_ν și Y_ν, obținem

$$J_\nu''(z) = -\frac{1}{z}J_\nu'(z) + \left(\frac{\nu^2}{z^2} - 1\right)J_\nu(z) \tag{3}$$

din care, prin derivare, rezultă

$$J_\nu'''(z) = -\frac{1}{z}J_\nu''(z) + \left(\frac{\nu^2 + 1}{z^2} - 1\right)J_\nu'(z) - \frac{2\nu^2}{z^3}J_\nu(z) \tag{4}$$

Ecuațiile (3) și (4) sînt verificate și de funcția Y_ν.

* Lector dr., catedra Matematici I

1848

Analog, din ecuaţia lui Bessel modificată (2) obţinem

$$I_\nu''(z) = -\frac{1}{z} I_\nu'(z) + \left(\frac{\nu^2}{z^2} - 1\right) I_\nu(z) \tag{5}$$

$$I_\nu'''(z) = -\frac{1}{z} I_\nu''(z) + \left(\frac{\nu^2+1}{z^2} + 1\right) I_\nu'(z) - \frac{2\nu^2}{z^3} I_\nu(z) \tag{6}$$

Calculînd wronskianul funcţiilor J_ν, Y_ν, I_ν, K_ν, utilizînd egalităţile (3) — (6) şi ţinînd seama că anumiţi determinanţi sînt nuli, obţinem succesiv

$$W[J_\nu, Y_\nu, I_\nu, K_\nu] = \begin{vmatrix} J_\nu & Y_\nu & I_\nu & K_\nu \\ J_\nu' & Y_\nu' & I_\nu' & K_\nu' \\ J_\nu'' & Y_\nu'' & I_\nu'' & K_\nu'' \\ J_\nu''' & Y_\nu''' & I_\nu''' & K_\nu''' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} J_\nu & Y & I_\nu & K_\nu \\ J_\nu' & Y_\nu' & I_\nu' & K_\nu' \\ -J_\nu & -Y_\nu & I_\nu & K_\nu \\ -J_\nu' & -Y_\nu' & I_\nu' & K_\nu' \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \begin{vmatrix} J_\nu & Y_\nu & 0 & 0 \\ J_\nu' & Y_\nu' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_\nu & K_\nu \\ 0 & 0 & I_\nu' & K_\nu' \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} J_\nu & Y_\nu \\ J_\nu' & Y_\nu' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_\nu & K_\nu \\ I_\nu' & K_\nu' \end{vmatrix} =$$

$$= 4\ W[J_\nu, Y_\nu] \cdot W[I_\nu, K_\nu].$$

Însă

$$W[J_\nu, Y_\nu] = \frac{2}{\pi z}, \quad W[I_\nu, K_\nu] = -\frac{1}{z} \tag{7}$$

şi deci

$$W[J_\nu, Y_\nu, I_\nu, K_\nu] = -\frac{8}{\pi z^2}, \ \forall \nu \in \mathbb{C} \tag{8}$$

ceea ce demonstrează că funcţiile lui Bessel J_ν, Y_ν, I_ν, K_ν sînt liniar independente.

Analog se demonstrează că funcţiile Bessel, J_ν, $J_{-\nu}$, $I_{-\nu}$, I_ν sînt liniar independente pentru $\forall\, \nu \neq n$, $n \in \mathbb{Z}$. În adevăr,

$$W[J_\nu, J_{-\nu}, I_\nu, I_{-\nu}] = 4W[J_\nu, J_{-\nu}]W[I_\nu, I_{-\nu}] = \frac{16 \sin^2 \nu\pi}{\pi^2 z^2}, \tag{9}$$

deoarece $W[J_\nu, J_{-\nu}] = -\dfrac{2\sin\nu\pi,}{\pi z}$, $W[I_\lambda, I_{-\nu}] = -\dfrac{2 \sin\nu\pi}{\pi z}$.

3. **Propoziţia 2.** Pentru $\forall\ \nu \in C$ soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare

$$z^4 w^{IV} + 2z^3 w''' - (2\nu^2 + 1)z^2 w'' + (2\nu^2 + 1)z w' + (\nu^4 - 4\nu^2 - z^4)w = 0, \tag{10}$$

$\nu \in \mathbb{C}$ este

$$w(z) = AJ_\nu(z) + BY_\nu(z) + CI_\nu(z) + DK_\nu(z) \tag{11}$$

unde A, B, C, D sînt constante arbitrare.

Demonstrație. Se determină soluții particulare pentru ecuația diferențială liniară (10) în vecinătatea punctului singular $z = 0$ de forma unei serii de puteri generalizate (metoda lui Frobenius)

$$w(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^{m+r}, \quad c_0 \neq 0, \tag{12}$$

unde r este un parametru ce urmează a fi determinat.

Calculînd derivatele lui w și introducînd în ecuația (10), după gruparea convenabilă a termenilor, rezultă

$$\sum_{m=0}^{\infty} \{(m+r)(m+r-2)[(m+r-1)^2 - 2\nu^2 - 1] + \nu^4 - 4\nu^2\} c_m z^{m+r} = \tag{13}$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^{m+r+4}.$$

Egalînd în (13) coeficienții acelorași puteri ale lui z se obțin formulele de recurență

$$z^{r+m}: \{(m+r)(m+r-2)[(m+r-1)^2 - 2\nu^2 - 1)] + \nu^4 - 4\nu^2\} c_m = 0, \quad m = 0, 1, 2, 3; \tag{14}$$

$$z^{m+r+4}: \{(m+r+4)(m+r+2)[(m+r+3)^2 - 2\nu^2 - 1)] + \nu^4 - 4\nu^2\} c_{m+4} = c_m, \quad m \in \mathbb{Z}_+. \tag{15}$$

Deoarece $c_0 \neq 0$, pentru a satisface relația (14) în cazul cînd $m = 0$, trebuie să avem

$$r(r-2)(r^2 - 2r - 2\nu^2) + \nu^4 - 4\nu^2 = 0. \tag{16}$$

Ecuația (16) este ecuația determinată și are rădăcinile $r_1 = \nu$, $r_2 = -\nu$, $r_3 = 2 + \nu$, $r_4 = 2 - \nu$.

Pentru rădăcina $r = r_1 = \nu$ a ecuației determinate, formulele de recurență (14) devin

$$(1 - 4\nu^2)c_1 = 0, \text{ cînd } m = 1;$$
$$\text{o identitate, cînd } m = 2; \tag{17}$$
$$(4\nu^2 + 6\nu + 3)c_3 = 0, \text{ cînd } m = 3$$

din care, pentru $\nu \neq \pm -1/2$ și $\nu \neq \dfrac{-3 - i\sqrt{3}}{4}$, obținem

$$c_1 = 0, \quad c_2 - \text{nedeterminat}, \quad c_3 = 0.$$

Pentru $r = r_1 = \nu$ formulele de recurență (15) devin

$$c_{m+4} = \frac{1}{(m+4)(m+2)(2\nu + m + 4)(2\nu + m + 2)} c_m, \; m \in \mathbb{Z}_+. \tag{18}$$

Luînd pentru constantele c_0 și c_2, care sînt nedeterminate, valorile

$$c_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}, \quad c_2 = -\frac{1}{2^{\nu+2}\Gamma(\nu+2)}, \tag{19}$$

cum $c_1 = 0$ și $c_3 = 0$, din formulele (18) rezultă

$$c_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+\nu}\, m!\,\Gamma(\nu+m+1)}, \quad c_{2m+1} = 0, \quad m \in \mathbb{Z}_+ \tag{20}$$

și deci o soluție particulară a ecuației (10) de forma (12) corespunzătoare rădăcinii ecuației determinate $r = r_1 = \nu$ este

$$w_1(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+\nu} = J_\nu(z). \tag{21}$$

Dacă în formulele (18) luăm pentru c_0 și c_2 valorile

$$c_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}, \quad c_2 = \frac{1}{2^{\nu+2}\Gamma(\nu+2)}, \quad c_1 = 0, \quad c_3 = 0. \tag{22}$$

obținem

$$c_{2m} = \frac{1}{2^{2m+\nu}\, m!\,\Gamma(\nu+m+1)}, \quad c_{2m+1} = 0, \quad m \in \mathbb{Z}_+ \tag{23}$$

și deci o a doua soluție particulară a ecuației (10) de forma (12) corespunzătoare lui $r_1 = \nu$ este

$$w_2(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+\nu} = I_\nu(z). \tag{24}$$

Dacă se consideră pentru ecuația determinată (16) rădăcina $r = r_2 = -\nu$, printr-un calcul analog celui de mai sus se obțin alte două soluții particulare de forma (12) pentru ecuația (10). Însă, observînd că ecuația (10) este invariantă la transformarea $\nu \to -\nu$, alte două soluții particulare ale acestei ecuații sînt obținute din (12) și (24) schimbînd pe ν în $-\nu$; rezultă

$$w_3(z) = J_{-\nu}(z), \quad w_4(z) = I_{-\nu}(z). \tag{25}$$

Dacă $\nu \notin \mathbb{Z}$, din (9) rezultă că funcțiile J_ν, $J_{-\nu}$, I_ν și $I_{-\nu}$ sînt liniar independente și soluția generală a ecuației (10) este

$$w(z) = AJ_\nu(z) + BJ_{-\nu}(z) + CI_\nu(z) + DI_{-\nu}(z) \tag{26}$$

cu A, B, C, D constante arbitrare.

Dacă $\nu = n \in \mathbb{Z}$, atunci (26) nu reprezintă soluția generală a ecuației (10) deoarece $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$, $I_{-n}(z) = I_n(z)$.

În acest caz sistemul fundamental de soluții pentru ecuația (10) este dat de funcțiile J_ν, I_ν, Y_ν, K_ν, unde

$$Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi}, \quad K_\nu(z) = \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin\nu\pi}. \tag{27}$$

În baza relației (8), funcțiile J_ν, I_ν, Y_ν, K_ν sînt liniar independente pentru $\forall \nu \in \mathbb{C}$; deci soluția generală a ecuației (10) este

$$w(z) = AJ_\nu(z) + BY_\nu(z) + CI_\nu(z) + DK_\nu(z) \tag{28}$$

valabilă și în cazul cînd $\nu = n \in \mathbb{Z}$.

4. **Observații.** 1. Alte soluții particulare pentru ecuația (10). Dacă în formulele de recurență (17) și (18) se consideră

$$c_0^* = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)},\ c_1^* = 0,\ c_2^* = 0,\ c_3^* = 0 \tag{29}$$

rezultă

$$c_{4n+1}^* = {}_{4n+2}^* = c_{4n+3}^* = 0,\ c_{4n}^* = \frac{1}{2^{\nu+4n}(2n)!\Gamma(\nu+2n+1)}, \tag{30}$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

și deci o altă soluție particulară a ecuației (10) corespunzătoare rădăcinii ecuației determinate $r = r_1 = \nu$ este

$$w_1^*(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!\ \Gamma(\nu+2m+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+4m}. \tag{31}$$

Analog, pentru rădăcina ecuației determinate $r = r_2 = -\nu$, se obține soluția particulară

$$w_2^*(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!\Gamma(-\nu+2m+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu+4m}. \tag{32}$$

Considerînd pentru ecuația determinată rădăcina $r = r_3 = 2 + \nu$, formulele de recurență (14) și (15) devin

$$(4\nu^2 + 8\nu + 3)c_1^* = 0,\ (\nu^2 + 3\nu + 2)c_2^* = 0,\ (4\nu^2 + 16\nu + 5)c_1^* = 0, \tag{33}$$

$$c_{m+4}^* = \frac{1}{(m+6)(m+4)(2\nu+m+6)(2\nu+m+4)}\, c_m^*,\ m \in \mathbb{Z}_+.$$

Presupunînd în acest caz

$$c_0^* = \frac{1}{2^{\nu+2}\Gamma(\nu+2)},\ c_1^* = c_2^* = c_3^* = 0, \tag{34}$$

rezultă

$$c_{4m+1}^* = 0,\ c_{4m+2}^* = 0,\ c_{4m+3}^* = 0, \tag{35}$$

$$c_{4m}^* = \frac{1}{2^{4m+\nu+2}(2m+1)!\Gamma(\nu+2m+2)},\ m \in \mathbb{Z}_+$$

și se obține pentru ecuația (10) soluția particulară

$$w_3^*(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!\Gamma(\nu+2m+2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+4m+2}. \tag{36}$$

Printr-un calcul analog, considerînd pentru ecuația determinantă rădăcina $r = r_4 = 2 - \nu$, se obține pentru ecuația (10) soluția particulară

$$w_4^*(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!\,\Gamma(-\nu+2m+2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu+4m+2}. \tag{37}$$

(Soluția (37) poate fi obținută direct din (36) prin transformare $\nu \to -\nu$, în baza invarianței ecuației (10) la această transformare).
Pentru $\nu \neq \mathbb{Z}$ a cele patru soluții particulare w_1^*, w_2^*, w_3^*, w_4^* date de formulele (31), (32), (36), (37) sînt liniar independente și deci constituie un sistem fundamental de soluții pentru ecuația (10). Se observă că acest sistem fundamental de soluții nu este independent de sistemul fundamental de soluții (21), (24), (25), deoarece au loc relațiile

$$w_1^*(z) - w_3^*(z) = J_\nu(z), \quad w_1^*(z) + w_3^*(z) = I_\nu(z) \tag{38}$$

$$w_2^*(z) - w_4^*z) = J_{-\nu}(z), \quad w_2^*(z) + w_4^*(z) = I_{-\nu}(z).$$

2. Pentru $\nu = \pm 1/2$ ecuația (10) devine

$$z^4 w^{IV} + 2z^3 w'' - \frac{3}{2} z^2 w'' + \frac{3}{2} z w' - \left(\frac{15}{16} + z^4\right) w = 0 \tag{39}$$

care se integrează prin metode elementare. În adevăr, punînd $w(z) = z^{-1/2} u(z)$ ecuația (39) devine $u^{IV} - u = 0$ cu soluția generală

$$u(z) = A\cos z + B\sin z + C e^z + D e^{-z}$$

și deci soluția generală a ecuației (39) este

$$w(z) = z^{-1/2}[A\cos z + B\sin z + C e^z + D e^{-z}]$$

cu A, B, C, D constante arbitrare.

BIBLIOGRAFIE

1. *G. Arfken*, Mathematical Methods for Physicists, Academic Press, 1966.
2. *G. Mocică, C. Radu*, Flambajul la torsiune al unei membrane cilindrice polimere cu miez elastic, St. cerc. mat. tom. 26, nr. 2, p. 197—216, București, 1974.

On the General Solution of a Differential Equation of Bessel Type

In the paper it is shown that the general solution of the equation

$$z^4 w^{IV} + 2z^3 w''' - (2\nu^2 + 1) z^2 w'' + (2\nu^2 + 1) z w' + (\nu^4 - 4\nu^2 - z^4) w = 0, \quad \nu \in \mathbb{C}$$

is

$$w(z) = AJ_\nu(z) + BY_\nu(z) + CI_\nu(z) + DK_\nu(w(z)$$

C.Z. :744.1

GENERAREA CORPURILOR CONICE DE SECȚIUNE TRANSVERSALĂ CUNOSCUTĂ

V. BUZILĂ, DOINA IORDACHE*

În lucrare se prezintă o metodă de generare a unor corpuri (suprafețe) conice cu baza cunoscută, pornind de la adevărata mărime a unei secțiuni transversale. Elementele geometrice care caracterizează suprafața sînt determinate prin metode numerice. Pentru exemplificare s-a ales o aplicație inedită.

1. Introducere

În activitatea de proiectare a formelor geometrice din familia conicelor, geometria descriptivă și metodele ei de transformare oferă largi posibilități de rezolvare a problemelor mai ales pe cale grafică. Cunoașterea exactă a parametrilor geometrici care caracterizează fiecare suprafață permite obținerea unor scule de tipul poansoanelor sau a unor suprafețe de învelișuri subțiri desfășurabile : buncăre, separatoare, racorduri, rezervoare, pîlnii de evacuare etc. Acești parametri sînt (fig. 1) : vîrful conului

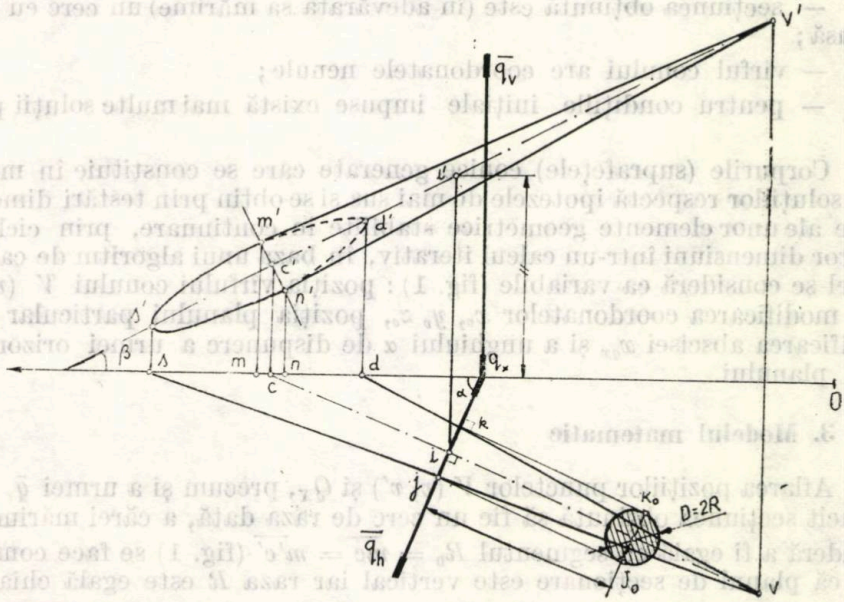


Fig. 1 — Transpunerea în epură a problemei

* Șef lucrări dr. ing; Șef lucrări dr. ing., catedra Geometrie descriptivă și desen

(V), poziția planului în care este situată baza conului și curba $\Gamma(\gamma, \gamma')$ care descrie conturul bazei. De obicei această curbă este de formă circulară sau eliptică, poziția vîrfului (V) este cunoscută și se caută aflarea adevăratei mărimi a secțiunii obținute cu un plan oarecare $[Q][\bar{q}_h, \bar{q}_v]$ precum și desfășurată în plan a conului respectiv. Lucrările de specialitate [1], [2] tratează în mod grafic aceste aspecte. Un caz interesant îl reprezintă studiul corpurilor de formă conică a căror bază este o curbă închisă de formă neregulată, dar a căror secțiune transversală pentru o anumită poziție a planului de secționare are dimensiuni și forme impuse. În lucrarea [3] se face un studiu grafo-analitic pentru un caz dat și sînt enunțate și rezolvate ecuațiile care definesc valorile coordonatelor unor puncte caracteristice.

Prin lucrarea de față se propune o metodă de cercetare teoretică a generării unor corpuri (suprafețe) de formă conică pornindu-se de la forma și dimensiunile bazei conului și de la forma și dimensiunile secțiunii dorite, ca exemplificare luîndu-se o aplicație inedită.

2. Formularea metodei

În scopul generării suprafețelor conice se fac următoarele ipoteze:

— baza conului este situată într-un plan de proiecție convenabil ales;

— planul de secționare a corpului (suprafeței) este un plan particular care nu taie baza;

— secțiunea obținută este (în adevărata sa mărime) un cerc cu raza impusă;

— vîrful conului are coordonatele nenule;

— pentru condițiile inițiale impuse există mai multe soluții posibile.

Corpurile (suprafețele) conice generate care se constituie în mulțimea soluțiilor respectă ipotezele de mai sus și se obțin prin testări dimensionale ale unor elemente geometrice stabilite în continuare, prin ciclarea acestor dimensiuni într-un calcul iterativ, în baza unui algoritm de calcul. Astfel se consideră ca variabile (fig. 1): poziția vîrfului conului V (v, v') prin modificarea coordonatelor x_v, y_v z_v, poziția planului particular prin modificarea abscisei x_{qx} și a unghiului α de dispunere a urmei orizontale q_v a planului.

3. Modelul matematic

Aflarea pozițiilor punctelor V (v, v') și Q_X, precum și a urmei $\bar{q}_v$ astfel încît secțiunea obținută să fie un cerc de raza dată, a cărei mărime se consideră a fi egală cu segmentul $R_0 = \overline{mc} = \overline{m'c'}$ (fig. 1) se face considerînd că planul de secționare este vertical iar raza R este egală chiar cu segmentul $\overline{ij}$, la care se acceptă o abatere ΔR. Urma $\bar{q}_j$ a planului este considerată ca fiind perpendiculară pe axa $\overline{CV}$ $(\overline{cv}, \overline{c'v'})$ adică $\bar{q}_h \perp \overline{cv}$. Se vor determina coordonatele punctelor $I(i, i')$ și $J(j, j')$ și anume $i(x_i y_i)$ și

$j(x_i, y_i)$ așa cum se arată în fig. 2. În continuare se determină: distanța $R = \overline{ij}$, unghiul corespunzător α, cota Z_v a vîrfului (pentru Z_t, Z_y impuși prin valori inițiale cunoscute) în funcție de coordonatele punctului $S(s, s')$ considerate cunoscute.

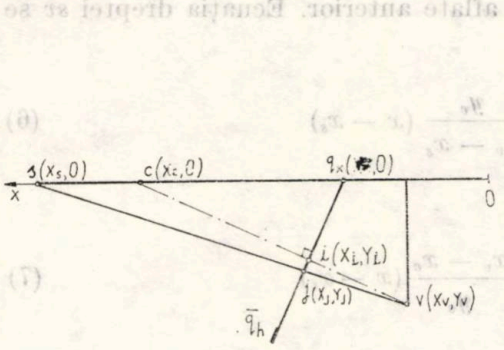


Fig. 2 — Schema pentru determinarea pozițiilor punctelor I și J

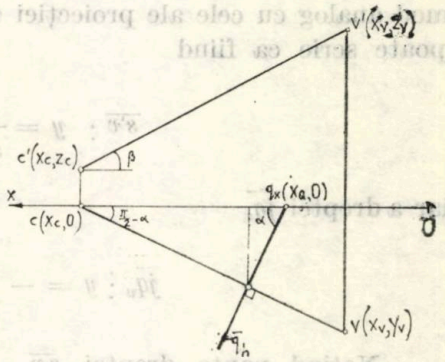


Fig. 3 — Schema de calcul a cotei Z_V

3.1. *Determinarea coordonatelor punctului* I $(x_i y_i, 0)$

Pentru determinarea poziției punctului I (i, i) dat prin proiecția sa orizontală i (x_i, y_i) se consideră notațiile din fig. 2 și se scriu ecuațiile dreptelor care intersectate dau acest punct, drepte care sînt perpendiculare între ele și anume

$$\overline{cv} : y = \frac{y_v}{x_v - x_c}(x - x_c) \tag{1}$$

$$\overline{iq_i} : y = -\frac{x_v - x_c}{y}(x - x_c) \tag{2}$$

Se notează panta dreptei cv

$$A = \frac{y_v}{x_v - x_c} \tag{3}$$

respectiv panta dreptei $\overline{iq_x}$

$$B = -\frac{1}{A} \tag{4}$$

Din rezolvarea sistemului format de ecuațiile (1) și (2) rezultă coordonatele proiecției orizontale a punctului $I(i, i')$

$$\begin{cases} x_i = \dfrac{A \cdot x_c - B \cdot x_{q_x}}{A - B} \\ y_j = A(x_i - x_s) \end{cases} \tag{5}$$

3.2. *Determinarea coordonatelor punctului* $I(x_j, y_j, 0)$

Punctul $J(j, j)$ este situat tot pe urma $\overline{q_h}$ a planului auxiliar $[Q]$ (fig. 2), coordonatele proiecției orizontale $j(x_j, y_j)$ determinîndu-se în mod analog cu cele ale proiecției i aflate anterior. Ecuația dreptei $\overline{sv}$ se poate scrie ca fiind

$$\overline{s'v} : y = \frac{y_v}{x_v - x_s}(x - x_s) \tag{6}$$

iar a dreptei $\overline{jq_x}$

$$\overline{jq_u} : y = -\frac{x_v - x_c}{y_v}(x - x_v) \tag{7}$$

Notînd panta dreptei $\overline{sv}$

$$C = \frac{y_v}{x_v - x_s} \tag{8}$$

și rezolvînd sistemul format de ecuațiile (6) și (7) se obțin coordonatele proiecției orizontale j a punctului J.

$$\begin{cases} x_j = \dfrac{C \cdot x_s - B \cdot x_{qx}}{C - B} \\ y_j = C(x_j - x_s) \end{cases} \tag{9}$$

3.3. *Determinarea distanței* $\overline{IJ}$

Datorită faptului că punctele I, J sînt situate în planul de secțiune vertical $[Q]$ ($\overline{q_h}$, $\overline{q_v}$) rezultă că distanța $\overline{ij}$ este în adevărată mărime în planul $[H]$. Această distanță trebuie să fie egală cu raza R_0 a cercului de secțiune obținut în adevărata mărime prin rabatarea pe planul $[H]$, așa cum se vede în fig. 1.

Distanța R_0 are valoarea nominală

$$R_0 = \frac{\overline{m'n'}}{2}$$

deoarece $\overline{MN}(mn, \overline{m'n'})$ este o dreaptă frontală care este privită din vîrful $V(v, v')$, $m'n'$ reprezentînd chiar diametrul $D = 2R_0$ sub care se vede baza $\{s'm'd'n'\}$ a conului.

Valoarea distanței $\overline{ij}$, notată cu R, este dată de relația

$$R = |\overline{ij}| = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

3.4. *Determinarea valorii unghiului* α *și a cotei* z_v.

Unghiul α (fig. 3) determină poziția planului auxiliar $[Q]$ față de planul $[V]$ și față de $\overline{CV}$ $(\overline{cv}, \overline{c'v'})$ și se calculează cu relația :

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{y}{x_i - x_{qx}} \tag{11}$$

în care x_i, y_i sînt date de (5).

Cota z_v care definește înălțimea la care se află vîrful $V(v, v')$ este dată de relația

$$z_v = z_s + (x_v - x_s)\operatorname{tg}\beta \tag{12}$$

în care x_s și z_s sînt coordonatele punctului $S(s, s')$, iar β este unghiul (constant) de dispunere a semiaxei $\overline{SD}$ $(sd, s'd')$ a bazei $\{SMDN\}$

4. Aplicație

Pentru exemplificarea metodei propuse, s-a considerat o aplicație neconvențional-tehnică și anume stabilirea pe cale grafo-analitică a mulțimii soluțiilor de plasare a vîrfului $V(v, v')$ al unui con imaginar sub care este observată (într-un sistem de proiecție central) o celebră pictură din sec. XVI aparținînd lui Holbein cel Tînăr, intitulată „Ambasadorii" (1533), expusă la National Gallery din Londra (foto 1). Așa cum se poate constata, în partea de jos a tabloului, așezat în diagonală, este reprezentat un obiect ciudat, parcă străin de compoziția în sine. Un text explicativ atașat lîngă tablou, lămurește că obiectul respectiv, privit din partea dreaptă este imaginea deformată (realizată de pictor prin metoda numită „racursi") a unui craniu omenesc (foto 2).

Considerînd că imaginea acestui obiect alungit se reduce în funcție de unghiul sub care se dispune privitorul și că în conștient se constituie imaginea unui craniu (avînd forma conturului înscrisă într-un cerc teoretic) iar planul ochilor privitorului este dat chiar de planul auxiliar, vertical $[Q]$ (q_h, q_v), aflarea soluțiilor se face în baza modelului prezentat în cap, 3.

Pentru aflarea soluțiilor posibile s-a pornit de la ideea că valoarea R a razei calculate cu ajutorul relației (10) pentru diferite valori ale para-

metrilor variabili x_v, y_v, și y_v trebuie să îndeplinească condiția $R \in \{R_0 \pm \Delta R\}$ în care ΔR are rolul de a acoperi subiectivismul observării de privitor a semiaxei $\overline{MN}$ a bazei. Se consideră că există (cel puțin teoretic) mai

Foto 1. Reproducere după tabloul „Ambasadorii", Holbein cel Tînăr (1497—1543)

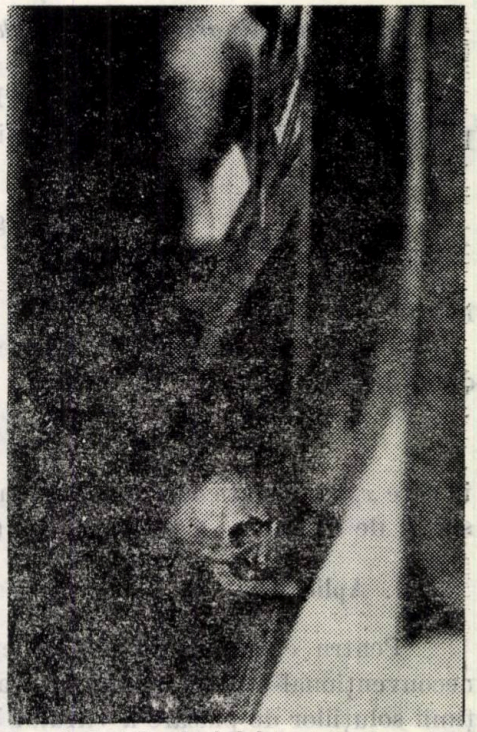


Foto 2. Detaliu ai tabelului privit sub unghiul determinat teoretic.

multe posibilități de combinare a parametrilor variabili, pentru ΔR impus și, din aceste considerente s-a apreciat că prin reciclarea parametrilor variabili — între limite impuse geometric de scara de reprezentare aleasă — se poate obține un număr finit de soluții. Astfel, a fost conceput un program de calcul al cărui algoritm este redat în fig. 4. Valorile inițiale și maxime ale parametrilor variabili precum și ale unor elemente consi-

Tabelul 1

Valorile elementelor geometrice luate în calcul

(dimensiuni în mm)

$x_{V\max}$	y_v min.	y_v max.	$z_{V\max}$	x_q min.	x_q max.	x_C	Z_C	x_S	Z_S	R_0	ΔR	obs. variante	obs. soluții
40	45	95	150	55 30	125	236	23	255	13	2,8	0,3 0,2	240 360	18 5

derate constante s-au stabilit în baza scării de reducere a reprezentării grafice și sînt prezentate în tabelul 1. Scara de reducere (1 : 14) s-a impus din condiția ca distanța 2 $(R_0 + \Delta R)$ sub care se vede semiaxa $\overline{MN}$ să

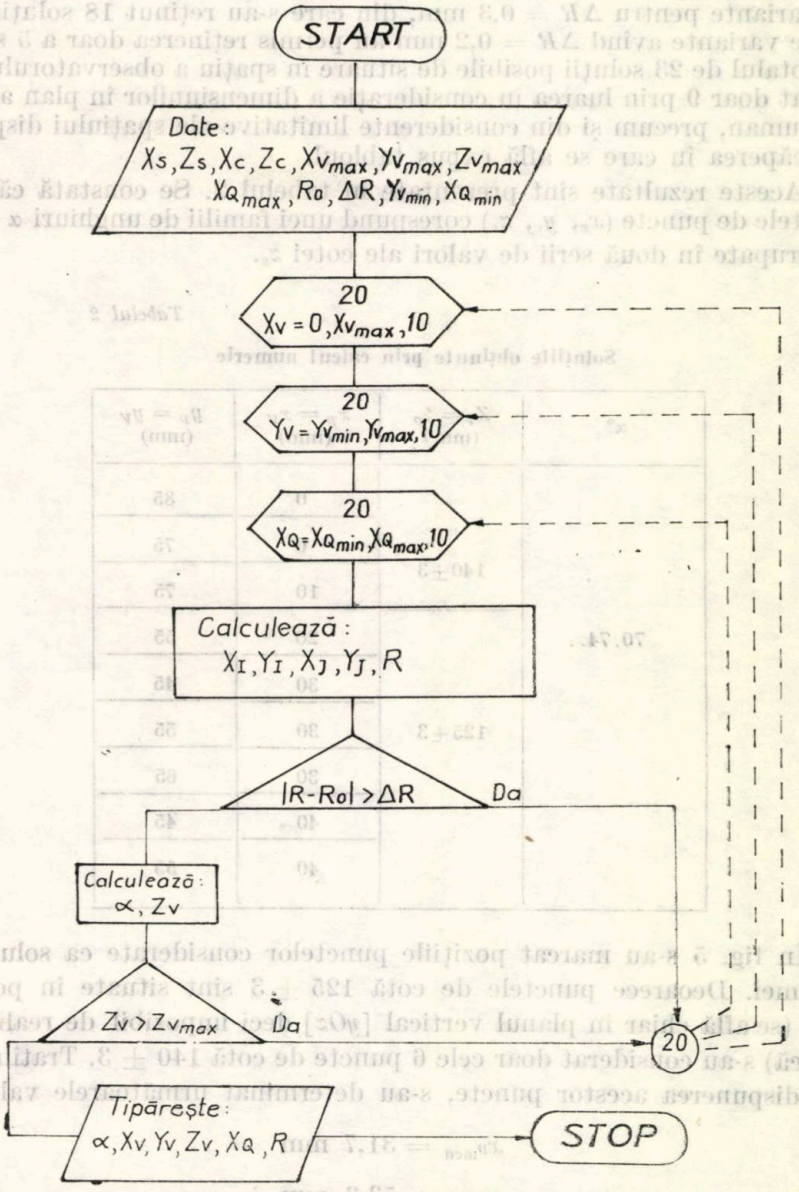


Fig. 4 — Algoritmul de calcul și determinare a soluțiilor

coincidă cu distanța interpupilară a observatorului, $d \cong 65$ mm. S-a considerat că planul de privire este chiar planul vertical $[Q]$ $(\bar{q}_h, \bar{q}_v)$ imaginea virtuală formîndu-se în vîrful $V(v, v')$ al conului considerat.

6. Rezultate obținute

Prin programul de calcul elaborat în baza algoritmului s-au rulat 240 variante pentru $\Delta R = 0{,}3$ mm, din care s-au reținut 18 soluții : alte 360 de variante avînd $\Delta R = 0{,}2$ mm au permis reținerea doar a 5 soluții. Din totalul de 23 soluții posibile de situare în spațiu a observatorului s-au selectat doar 9 prin luarea în considerație a dimensiunilor în plan ale corpului uman, precum și din considerente limitative ale spațiului disponibil în încăperea în care se află expus tabloul.

Aceste rezultate sînt prezentate în tabelul 2. Se constată că toate tripletele de puncte (x_v, y_v, z_v) corespund unei familii de unghiuri $\alpha \in [70°, 74°]$ grupate în două serii de valori ale cotei z_v.

Tabelul 2

Soluțiile obținute prin calcul numeric

$\alpha°$	$Z_V = Z_p$ (mm)	$x_p = x_V$ (mm)	$y_p = y_V$ (mm)
70.74..	140±3	0	85
		0	75
		10	75
		20	55
		30	45
	125±3	30	55
		30	65
		40	45
		40	55

În fig. 5 s-au marcat pozițiile punctelor considerate ca soluții ale problemei. Deoarece punctele de cotă 125 ± 3 sînt situate în pozițiile limită (se află chiar în planul vertical $[yOz]$ deci imposibil de realizat în practică) s-au considerat doar cele 6 puncte de cotă 140 ± 3. Tratînd statistic dispunerea acestor puncte, s-au determinat următoarele valori

$$xv_{med} = 31{,}7 \text{ mm}$$

$$yv_{med} = 53{,}3 \text{ mm}$$

Dreapta trasată printre punctele considerate are ordonata în origine $y_0 = 62{,}6$ mm iar coeficientul unghiular $m = 0{,}297$, care corespunde unui unghi de 16° făcut cu axa $\overline{Ox}$, cu complement unghiul $\alpha = 74°$ care este

chiar valoarea sub care trebuie dispusă urma $\bar{q}_h$ a planului vertical $[Q]$. Se constată că dreapta care reprezintă direcția de privire în planul $[H]$ a tabloului intersectează axa $\overline{Ox}$ chiar în centrul bazei conului (punct de abscisă $x_c = 236$ mm).

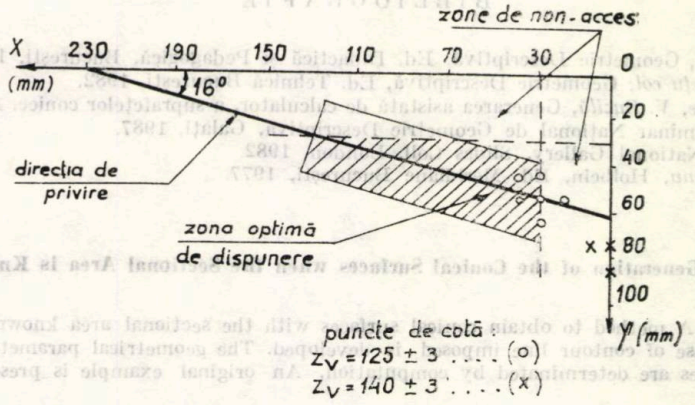


Fig. 5 — Dispunerea în plan a soluțiilor date de coordonatele x_p și y_p, pentru $z_p = 125 \pm 3$; 140 ± 3.

Concluzii

În baza studiului teoretic întreprins asupra stabilirii poziției în spațiu a unui observator care analizează o formă geometrică situată într-un plan înclinat față de direcția de privire, dar a cărui imagine deformată se constituie într-un contur bine definit (în cazul de față curbă închisă — cerc) se pot formula următoarele concluzii:

Există un număr finit de soluții ale problemei enunțate. Luînd în considerare dimensiunile tabloului, zona de non-acces de cca. 300 mm în lungul axelor $\overline{Ox}$ și Oy și ținînd seama de scara de reducere folosită în reprezentarea grafică a problemei, rezultă că spațiul de dispunere a observatorului este dat de zona hașurată din fig. 5, care corespunde următoarelor valori (m).

$$0{,}42 \leqslant x_p \leqslant 1{,}82$$

$$0{,}35 \leqslant y_p \leqslant 0{,}91$$

Cota z_p este în funcție de înălțimea de expunere a tabloului (cca 0,6 m măsurată de la baza inferioară a ramei) precum și de statura observatorului, element care are rolul de a stabili distanțele x_p, y_p pentru direcția de privire impusă de unghiurile $\beta = 27°$ (în plan vertical) și $\alpha = 74°$ (în plan orizontal).

În legătură cu maniera de realizare grafică a imaginii (prin „racursi") se poate afirma că, deși la acea vreme geometria descriptivă încă nu era

fundamentată științific, Holbein cel Tînăr era cu adevărat un savant, așa cum îl prezintă biografii și criticii săi, deci un adevărat și original precursor al geometriei descriptive.

BIBLIOGRAFIE

1. *J. Moncea*, Geometrie Descriptivă, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1982
2. *P. Precupețu col*, Geometrie Descriptivă, Ed. Tehnică București, 1982.
3. *D. Iordache, V. Buzilă*, Generarea asistată de calculator, a suprafețelor conice. Al doilea Seminar Național de Geometrie Descriptivă, Galați, 1987.
4. * * * — National Gallery, Slides Coll. London, 1982.
5. *R. Boureanu*, Holbein, Ed. Meridiane București, 1977.

The Generation of the Conical Surfaces when the Sectional Area is Known

A method to obtain conical surfaces with the sectional area known, for the case of contour line imposed is developed. The geometrical parameters of surfaces are determinated by computation. An original example is presented.

C. Z: 621—233: 621.892.099.6

ÎNCERCĂRI PRIVIND LAGĂRELE CILINDRICE RADIALE DIN APARATE, CU LUBRIFICATIE FEROFLUIDICĂ

T. DEMIAN, S. KOSTRAKIEVICI*

Articolul prezintă construcția unui stand pentru deteminarea momentului de frecare și a etanșării realizate cu două tipuri de lagăre cu ferofluide. Este propusă de asemenea, o metodă simplă de proiectare a acestor lagăre.

Pe linia ridicării performanțelor aparatelor și echipamentelor de mecanică fină folosindu-se ferofluidele realizate la noi, [1], în lucrarea prezentată sînt date încărcările efectuate pe un stand de construcție proprie și rezultatele obținute.

Întrucît în domeniul construcției de aparate, transmiterea și prelucrarea semnalelor constituie scopul esențial, la conceperea standului s-a prevăzut ca aceasta să posede în primul rînd posibilitatea determinării încărcării exterioare și măsurarea momentului de frecare. Standul (fig. 1) se compune din turbina pneumatică 1 prin intermediul căreia se pune în mișcare arborele 3 care este sprijinit pe două lagăre gazostatice 4 și 4'. Un sistem format dintr-un disc codificar 5, fixat pe arborele 3, traductorul opto-electronic 6 și aparatul cu indicație digitală 7 permite măsurarea și afișarea turației arborelui. Între lagărele gazostatice 4,4' este plasat lagărul cu ferofluid 2. Pentru mărirea domeniului investigațiilor s-au construit două lagăre cu ferofluid (fig. 2), unul cu magnet permanent (fig. 2, a) și al doilea cu electromagnet (fig. 2, b). Lagărul cu magnet permanent conține : fusul 1, magnetul permanent 2 realizat din ferită și piesele polare 3,3'. Arborele 1 este confecționat din material magnetic. Cea de-a doua variantă de lagăr, avînd dimensiuni de gabarit identice este format din fusul 1, bobina 2, miezul electromagnetului 3 și piesele polare 4, 4'. În ambele cazuri ferofluidul a fost introdus prin injectarea între arbore și piesele polare.

Pentru determinarea încărcării pe lagăr în ambele variante de lagăr, se suspendă un taler 9 (fig. 1) pe care se pot plasa greutăți suplimentare. Măsurarea momentului de frecare decurge indirect. În acest scop pe fiecare variantă a fost montat un indicator, iar de placa de bază 10 s-a fixat o scală gradată unghiular 8. Urmărindu-se înclinația indicatorului pe

* Prof. dr. docent; Șef lucrări ing., catedra Mecanică fină

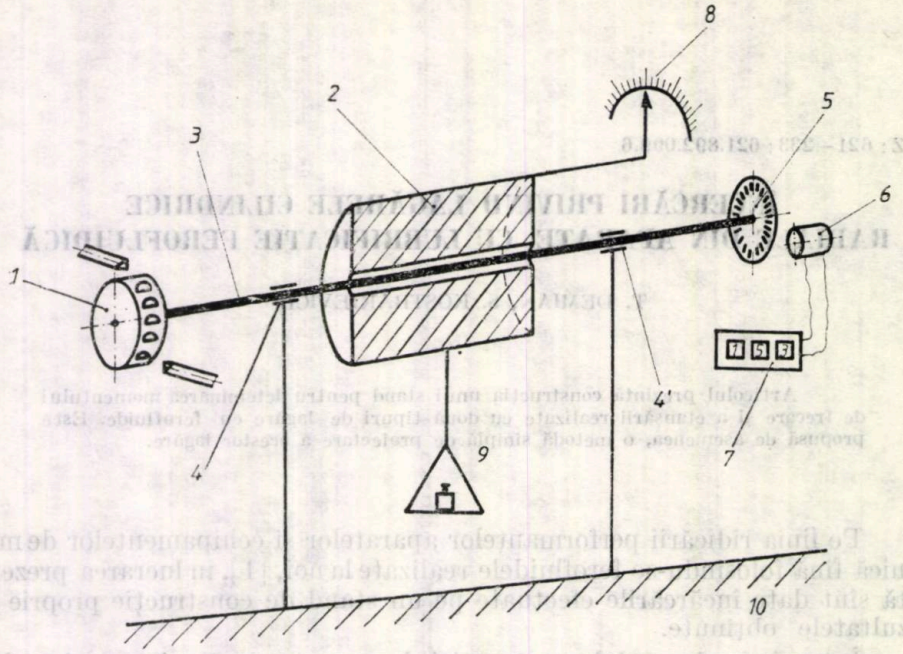


Fig. 1 — Stand pentru încercarea lagărelor cu ferofluide — reprezentare schematică

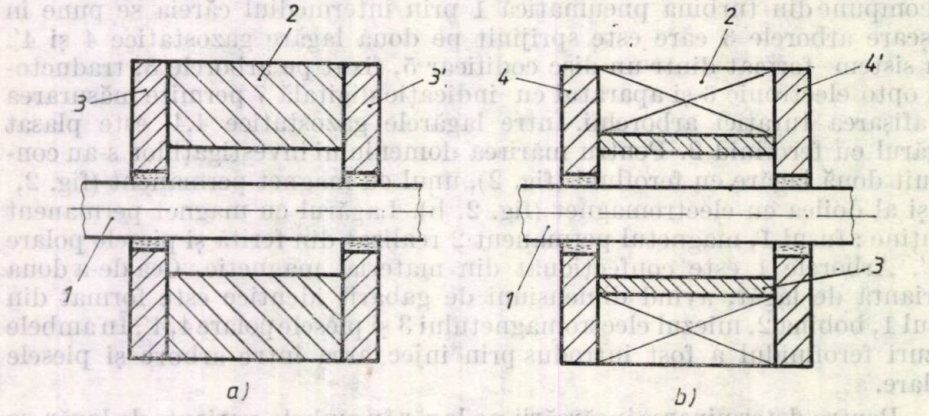


Fig. 2 a, b — Lagăre cu ferofluide : a — cu magnet permanent, b — cu electromagnet

scala gradată 8 și cunoscîndu-se poziția centrului de greutate a sitemului mobil lagăr-platan, se poate deduce prin calcul valoarea momentului de frecare.

Pentru evaluarea portanței în lagărul cu ferofluid, pentru zona de contact dintre o piesă polară și fus se acceptă o distribuție a presiunilor

în ferofluid ca în fig. 3, astfel că după [2] și [3], rezultă:

$$p_2 - p_1 = \mu_0 \int_0^H M(H, T_i)\, dH, \quad (1)$$

și $p_2 = p_3$ (2)

deci $$p_4 - p_3 = -\mu_0 \int_0^H M(H, T_f)\, dH, \quad (3)$$

și ca urmare,

$$\Delta p = p_4 - p_1 = \mu_0 \left[\int_0^H M(H, T_i) dH - \int_0^H M(H, T_f) dH \right], \quad (4)$$

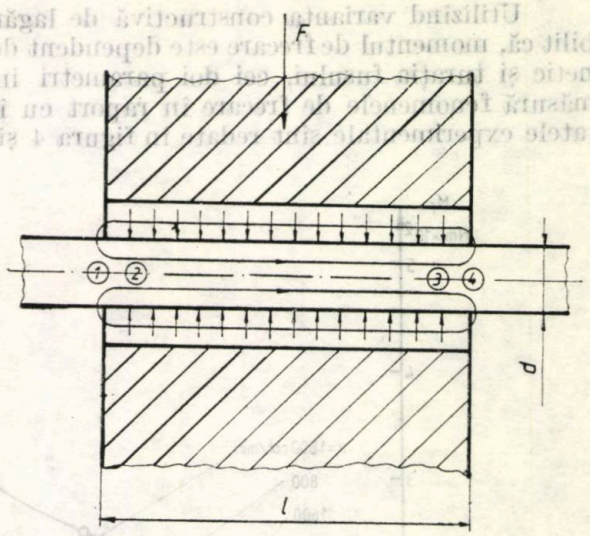


Fig. 3 — Distribuția cîmpului magnetic în zona întrefierului creat de o piesă polară și fus în prezența ferofluidului

în care: p_1, p_2, p_3 și p_4 presiunile statice din ferofluid, $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} H/m$ — permeabilitatea, M — magnetizația: T_i și T_f — temperatura la intrare și ieșire de pe fus, H — intensitatea cîmpului magnetic.

Dacă ferofluidul este saturat din punct de vedere magnetic ecuația (4) devine:

$$\Delta p = \mu_0 H(M_2 - M_1) = \mu H M_s \quad (5)$$

în care: M_s este magnetizația de saturație a ferofluidului.

Asimilînd această presiune, cu presiunea medie p_m pe lagăr se poate determina teoretic sarcina exterioară F aplicabilă pe lagăr:

$$F = \Delta p \cdot d \cdot l \quad (6)$$

unde: d și l reprezintă parametrii geometrici al lagărului.

Lagărul folosit la standul de încercare a avut următorii parametrii tehnici: $d = 2r = 8$ mm; $l = 24$ mm; $c = 0{,}02$ mm (jocul radical).

Utilizînd o magnetizație de saturație medie $M_s = 571 \cdot 10^3$ A/m pentru un ferofluid pe bază de ulei mineral și o intensitate a cîmpului magnetic $H = 3 \cdot 10^5$ A/m se obține o forță portantă:

$$F = \mu_0 \cdot H M_s \cdot d \cdot l = 1{,}102 \text{ N} \quad (7)$$

Sarcina radială pînă la care se păstrează lubrificația hidrodinamică determinată experimental a fost de 1,00 N ceea ce confirmă cu o bună aproximație rezultatele teoretice.

Utilizînd varianta constructivă de lagăr cu electromagnet s-a stabilit că, momentul de frecare este dependent de intensitatea cîmpului magnetic și turația fusului, cei doi parametri influențînd în cea mai mare măsură fenomenele de frecare în raport cu încărcărea lagărului. Rezultatele experimentale sînt redate în figura 4 și tabelul 1.

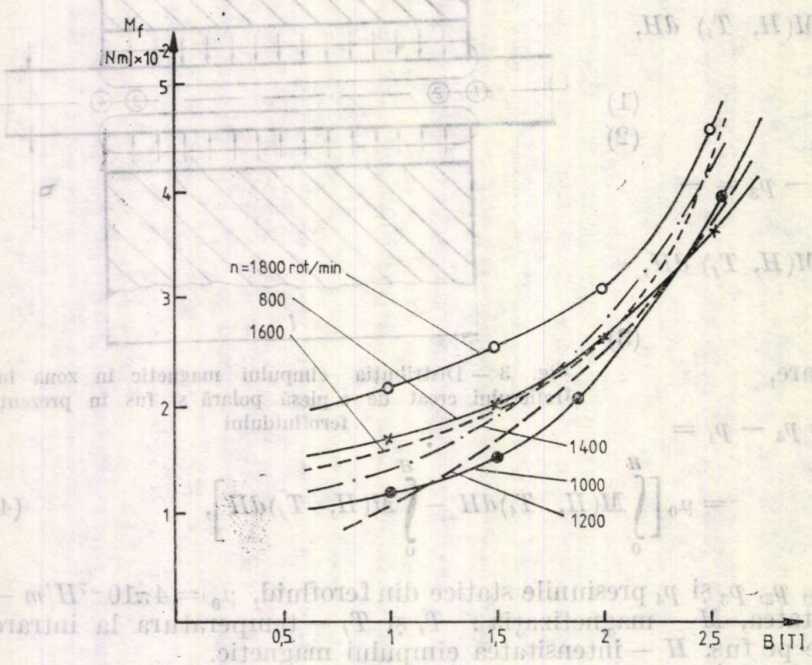


Fig. 4 — Variația momentului de frecare cu inducția magnetică

Din cele de mai sus rezultă că momentul de frecare din lagăr crește cu cei doi parametri menționați. Apoi, creșterea momentului de frecare este mai accentuată cu intensitatea cîmpului magnetic care mărește vîscozitatea ferofluidului. Variația turației fusului produce modificarea momentului de frecare și, anume, la scăderea turației de la 1200 rot/min la 800 rot/min, momentul de frecare crește, fenomen care se accentuează și mai mult la creșterea turației peste 1200 rot/min. Rezultă *existența unui optim* care pentru lagărul utilizat a fost de aproximativ 1200 rot/min.

Prin construcție, standul a permis și determinarea etanșării asigurate pe această cale. Încercările au fost efectuate pe același stand, prevăzut cu lagăr electromagnetic, pentru care păstrîndu-se același diametru, grosimile pieselor polare de 4 mm au asigurat o lungime portantă cumulată de $l = 8$ mm. Variația presiunii etanșate este mai mică în raport cu intenstatea cîmpului magnetic, dar crește o dată cu mărirea acesteia. Astfel, pentru valorile extreme ale inducției magnetice din tabelul 1, introducînd aer sub presiune între piesele polare, presiunile maxime suportate au fost de 0,80 bari și 0,6 bari la turația de 1500 rot/min.

Tabelul 1

Variația momentului de frecare cu inducția magnetică și turația

Încărcarea pe lagăr $F_{[N]}$	Inducția magnetică $B_{[T[}$	Momentul de frecare M_f[Nm]$\times 10^{-3}$					
		Turația fusului n [rot/min]					
		800	1000	1200	1400	1600	1800
0,4	1	11,07	16,9	11,47	14,1	15,7	22,47
	1,5	15,2	19,7	18,3	20,7	21,89	25,6
	2	24,01	25,5	24,6	20,6	24,4	30,6
	2,5	37,35	36,2	38,2	42,5	43,6	47,3
0,6	1	11,27	17,1	16,2	15,2	16,2	22,6
	1,5	15,4	19,8	18,4	20,9	22,00	25,8
	2	24,7	26,3	25,01	22,4	24,6	31,1
	2,5	36,9	36,4	38,3	40,7	43,5	47,9

Din cele expuse rezultă că o metodică practică, simplificată de proiectare a lagărului pornește de la alegerea raportului 1/d în limite acceptabile. Din relația (7) rezultă valoarea necesară a diametrului fusului cunoscînd încărcarea radială F,

$$d = \sqrt{\frac{F}{\mu_0 H M_s \frac{1}{d}}}, \tag{8}$$

iar momentul de frecare se poate calcula cu relația :

$$M_f = k n_t \frac{\eta}{c} \omega \cdot d^3 \tag{9}$$

în care : k — o constantă dependentă de construcția lagărului ; n_t — numărul suprafețelor portante 3 ; η — vîscozitatea ferofluidului [4] ; c — întrefierul ; n — turația arboreului ; d — diametrul lagărului.

Avînd în vedere avantajele pe care le prezintă, lagărele cu ferofluide pot fi utilizate în construcțiile de aparate și echipamente de mecanică fină, dată fiind portanța sporită pe care o oferă și lubrificația pe care o asigură. Domeniul lor de utilizare este limitat de gabaritul mai mare și necesitatea unei surse de alimentare cu curent electric, în cazul utilizării unui lagăr cu electromagnet. În plus, trebuie contat pe un moment de frecare mai mare cca 3—4 ori decît la lubrificație hidrodinamică, moment ce variază cu turația.

Luîndu-se măsurile constructive adecvate în ce privește forma pieselor polare și a fusurilor arborilor ghidați se pot prelua și forțe axiale și simultan se poate asigura o etanșare lipsită practic de uzură.

BIBLIOGRAFIE

1. *T. Demian, N. Lambrache,* Asupra preparării ferolubrifianților pe bază de magnetită prin metoda precipitării, Tribotehnica Ploiești, 1982.
2. *T. Demian, N. Lambrache,* Asupra utilizării ferofluidelor la lagărele aparatelor de mecanică fină, Bul. I. P. B. Nr. 1, 1981.
3. *T. Demian, A. Pascu,* Lagăre și ghidaje pentru aparate, Editura Academiei R.S.R., București 1980.
4. *E. Luca și alții,* Ferofluidele și aplicațiile lor în industrie, Editura Tehnică, București, 1978.

Versuche betreffend Radialgleitlagern mit eisenflüssiger Schmierung

In der Arbeit ist die Konstruktion eines Versuchsstand dargestellt um den Reibmoment und die Verdichtung bei zwei Gleitagern Typen mit Magnetflüssigkeit zu untersuchen. Es ist ebenffals eine einfache rechnerische Methode für den Entwurf empfohlen.

C.Z: 681.8

UNELE APLICAȚII ALE ECUAȚIILOR LUI LAGRANGE ÎN STUDIUL SISTEMELOR ACUSTICE

D. VOICULESCU, I. MAGHEȚI*

În lucrare se prezintă ecuația lui Lagrange adaptată pentru un sistem acustic complex, format din „n" rezonatori cuplați în serie sau paralel, pe baza analogiei mecano-acustice. Rezultatele teoretice obținute sînt aplicate la determinarea frecvențelor proprii ale unui atenuator reactiv de tip „trece jos". Metoda matricială utilizată permite cu ușurință calculul frecvenței minime și maxime a atenuatorului.

1. Introducere

Acustica modernă este știința radiației mecanice sub toate aspectele ei, incluzînd producerea, transmiterea și captarea vibrațiilor mediilor materiale de toate frecvențele.

Caracterul foarte general al acusticii moderne face ca aceasta să aibă implicații în cele mai variate domenii de activitate practică a omului, ca de exemplu studiul vibrațiilor și al zgomotelor, studiul șocurilor electro-acustice, acustica arhitecturală, acustica muzicală, acustica fiziologică, aeroacustica, acustica subacvatică, bioacustica, etc.

În cadrul acusticii tehnice se studiază caracteristicile de propagare ale undelor acustice în diferite medii complexe, ca de exemplu prin pereți multipli, tuburi, filtrele acustice, etc. care prezintă interes în practică.

O rezolvare comodă a acestor probleme se poate face dacă acestea pot fi reprezentate printr-un model analog, mecanic sau electric, ușor de înțeles și de studiat.

În lucrare se urmărește stabilirea unor analogii mecano-acustice pe baza cărora studiul fenomenului poate fi făcut prin scrierea ecuațiilor lui Lagrange cunoscute în studiul mișcării mecanice ale sistemelor materiale a căror configurație depinde de „n" parametri variabili independenți.

2. Analogia mecano-acustică

Un rezervor Helmholtz simplu — o cavitate care comunică cu exteriorul printr-un orificiu denumit gîtul rezonatorului — de fapt constituie prin comportarea sa un sistem oscilant. Astfel, aerul delimitat într-un spațiu (gîtul rezonatorului) are proprietăți de inerție similare cu acelea ale

* Prof. dr. ing; Șef lucrări dr., catedra Mecanică fină

unei mase, se comportă ca un amortizor datorită rezistenței de radiație acustică (sau vîscozității aerului) și prezintă caracteristicile elastice ale unui resort la care constanta de elasticitate k este determinată de compresibilitatea aerului din cavitatea V a rezonatorului.

Notînd cu $m_a = \rho lA$ masa acustică, în care ρ este densitatea aerului, l și A lungimea, respectiv aria secțiunii transversale a gîtului rezonatorului și V volumul aerului din cavitatea rezonatorului, frecvența pulsațiilor libere este dată de formula lui Rayleigh :

$$f = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{A}{lV}} = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{a}{V}}$$

unde s-a făcut notația $a = \frac{A}{l}$

În cazul oscilațiilor libere energia potențială înmagazinată în cavitatea rezonatorului se transformă în energie cinetică a masei acustice din gîtul rezonatorului și invers.

În fig. 1 sînt arătate în paralel, schema unui rezonator simplu de tip Helmholtz (sistem acustic) și un sistem mecanic oscilant.

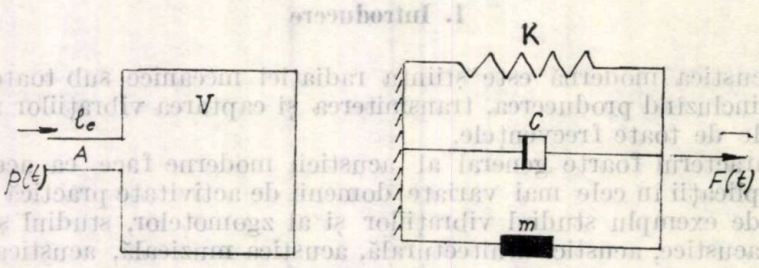


Fig. 1 — Sistem acustic Sistem mecanic

După cum este cunoscut, ecuația diferențială a oscilațiilor întreținute ale rezonatorului este (1) :

$$\rho lA\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\rho ck^2}{2\pi}A^2\frac{dx}{dt} + \frac{\rho c^2}{V}A^2x = p_aA\cos\omega t \qquad (1)$$

Împărțind ecuația (1) cu A și introducînd deplasarea volumică $\xi = xA$, aceasta se scrie sub forma :

$$\frac{\rho l}{A}\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{\rho ck^2}{2\pi}\frac{d\xi}{dt} + \frac{\rho c^2}{AV}\xi = p_a\cos\omega t \qquad (2)$$

Ecuația diferențială (2) este analogă cu ecuația diferențială a oscilațiilor întreținute cu amortizare a unui sistem mecanic cu un grad de libertate :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F\cos\omega t \qquad (3)$$

Comparînd ecuațiile (2) și (3) se pot stabili analogiile dintre mărimile mecanice și acustice arătate în tabelul de mai jos.

Sistem mecanic	Sistem acustic
— deplasarea . . . . . $x(m)$	— deplasarea volumică $s = xA(m^3)$
— viteza . . . . . $\dot{x}(m/s)$	— viteza volumică $\xi = xA(m^3/s)$
— masa . . . . . $m(kg)$	— masa acustică (inertanța) $m_a = \frac{\rho l}{A}(kg/m^2)$
— forța . . . . . $F(N)$	— presiunea acustică $p_a(N/m^2)$
— constanta elastică $k(kg/s^2)$	— rigiditatea acustică $k_a = \frac{\rho c^2}{V}(kg/m^4s^2)$
— constanta de amortizare $c(kg/s)$	— rezistența acustică $c_a = \frac{\rho c k^2}{2\pi}(kg/m^4s)$
— frecvența proprie a oscilatorului liniar $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$	— frecvența de rezonanță a rezonatorului $f = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{A}{lV}}$
— energie mecanică $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(Nm)$	— energie acustică $E = \frac{1}{2}m_a\dot{\xi}^2(Nm^4)$
— impedanța mecanică $Z(Ns/m)$	— impedanța acustică $Z_a(Ns/m^2)$
	— impedanța acustică spec. $Za_s(Ns/m^3)$

3. Ecuațiile lui Lagrange pentru sistemul acustic

Să considerăm pentru exemplificare un sistem acustic complex alcătuit prin cuplarea a „n" rezonatori de tip Helmholtz legați în serie sau în paralel prin elemente elastice — adică prin cavități care joacă rolul unor resorturi elastice — și care este raportat la un sistem de referință fix $Oxyz$ (fig. 2).

Plecînd de la analogia dintre un rezonator Helmholtz și un sistem mecanic arătată mai înainte, s-a urmărit posibilitatea de studiere a sistemelor acustice complexe prin scrierea ecuațiilor lui Lagrange cunoscute în studiul mișcărilor mecanice a căror configurație depinde de „n" parametri.

Să notăm cu $\bar{r}_k$ vectorul de poziție al centrului de masă al particulelor de aer din gîtul rezonatorului „k".

Masa aerului din gîtul de lungime „l_k" al rezonatorului oscilează după felul cum variază presiunea acustică.

În ipoteza că lungimea de undă λ a semnalului acustic este mai mare decît lungimea l_k a gîtului, toate particulele de aer din gîtul rezonatorului se deplasează în fază cu presiunea acustică p_a. Aceasta permite scrierea ecuației fundamentale a dinamicii sub forma :

$$\rho_k l_k A_k \ddot{\bar{r}}_k = \bar{p}_{ak} A_k \quad k(1,\ 2,\ \ldots\ n) \tag{4}$$

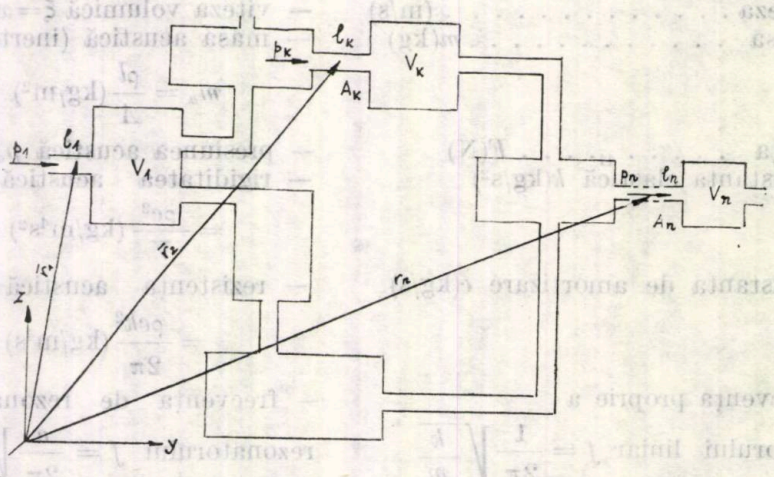


Fig. 2 — Sistem acustic format din cuplarea a „n" rezonatori Helmholtz

unde vectorii de poziție $\bar{r}_k$ sînt funcțiuni de coordonatele generalizate $x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_f,\ \ldots, x_n$ care reprezintă„ deplasările volumice" absolute ale particulelor de aer din gîturile rezonatorilor Helmholtz, adică produsul dintre deplasarea x_f și aria A_f a secțiunii transversale a gîtului rezonatorului și care definesc starea sistemului la un moment dat, adică :

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_f,\ \ldots\ x_s) \tag{5}$$

Se observă că în cazul sistemelor acustice, coordonatele generalizate sînt numai deplasări, nu și rotiri, iar forțele exterioare sînt date de presiunile acustice $\bar{p}_{ak}$.

Revenind la relația (4), prin multiplicarea acesteia cu $\dfrac{\partial \bar{r}_k}{\partial X_f}$ și însumînd pentru întreg sistemul acustic, se obține :

$$\sum_{k=1}^{n} \rho_k l_k A_k \ddot{\bar{r}} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial X_f} = \sum_{k=1}^{n} \bar{p}_k A_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial X_f} \tag{6}$$

Făcînd notația :

$$\Phi_{pf} = \sum_{k=1}^{n} \bar{p}_{ak} A_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial X_f} \tag{7}$$

unde Φ_{pf} reprezintă presiunea acustică generalizată și scriind $\ddot{\vec{r}}_k = \frac{d\dot{\vec{r}}_k}{dt}$, relația (6) se va scrie sub forma :

$$\sum_{k=1}^{n} \rho_k l_k A_k \frac{d\dot{\vec{r}}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial X_f} = \Phi_{pf} \tag{8}$$

sau încă, după unele transformări al membrului din partea stîngă a relației (8), se ajunge la forma :

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n} \rho_k l_k A_k \dot{\vec{r}}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial X_f} - \sum_{k=1}^{n} \rho_k l_k A_k \dot{\vec{r}}_k \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial X_f} \right) = \Phi_{pf} \tag{9}$$

Ținînd seama că $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial X_f}\right) = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial X_f}$ și considerînd că $\dot{X}_f$ sînt independente de coordonatele generalizate X_f, adică $\frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial \dot{X}_f} = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial X_f}$ relația (9) se va scrie :

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{k=1}^{n} \rho_k \frac{l_k}{A_k} \cdot \frac{\dot{X}_f^2}{2}\right] - \frac{\partial}{\partial x_f}\left[\sum_{k+1}^{n} \rho_k \frac{l_k}{A_k} \cdot \frac{\dot{X}_f^2}{2}\right] = \Phi_{pf} \tag{10}$$

Observînd că expresiile din parantezele relației (9) reprezintă energia cinetică totală T a sistemului acustic

$$T = \sum_{k=1}^{n} \rho_k \frac{l_k}{A_k} \frac{\dot{X}_f^2}{2} \tag{11}$$

după înlocuirea lor în (10) se obține sistemul ecuațiilor lui Lagrange de speța a II-a pentru sistemul acustic complex :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{X}_f}\right) - \frac{\partial T}{\partial X_f} = \Phi_{pf} \quad (f = 1, 2, \ldots s) \tag{12}$$

Dacă se ține seama și de forțele elastice, ecuațiile (12) se completează și cu forțele generalizate

$$\Phi_{ef} = -\frac{\partial U}{\partial X_f} \quad (f = 1, 2, \ldots s) \quad \text{unde} \quad U = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \frac{\rho c^2}{V_k} X_f^2 \tag{13}$$

(c=viteza sunetului în aer)

iar dacă se iau în considerare și frecările particulelor de aer de pereții gîtului rezonatorului, ecuației (13) i se va mai adăuga în plus și forța gene-

ralizată a frecărilor. Considerînd că există o funcție I_m de disipare a energiei acustice, forța generalizată a frecărilor va fi

$$\Phi_{rf} = -\frac{\partial I_m}{\partial \dot{X}_f} \quad \text{unde } I_m = -\sum_{k=1}^{n} \frac{2\pi\rho C}{\lambda^2} A_f \dot{X}_f \text{ (unde } \lambda = \text{lungimea de undă)} \tag{14}$$

Forma generală a ecuațiilor lui Lagrange pentru sistemele acustice va fi :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{X}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial X_k} + \frac{\partial u}{\partial X_f} + \frac{\partial I_m}{\partial \dot{X}_k} = \Phi_{pf} \tag{15}$$

4. Aplicație. Filtre acustice

Filtrele acustice fac parte din categoria atenuatoarelor reactive și sînt construite pe principiul filtrelor electrice. Particularitățile acestor sisteme constau în capacitatea lor de a lăsa să treacă fără o atenuare sensibilă, oscilațiile acustice avînd frecvențele într-un anumit domeniu și să anuleze sau să reflecte spre sursă toate oscilațiile cu frecvențele din afara acestui domeniu.

Pentru atenuarea zgomotului produs la evacuarea gazelor la motoarele cu combustie internă, poate fi utilizat filtrul de joasă frecvență, care permite trecerea, fără atenuare, a unui flux constant și a oscilațiilor de presiune cu frecvențe joase și care reține oscilațiile a căror frecvențe depășesc o anumită frecvență limită.

În fig. 3 se arată schematic un atenuator format prin cuplarea în serie a „n" rezonatoare Helmholtz.

În studiul acestui sistem acustic prezintă o mare importanță determinarea prin calcul a frecvențelor proprii de rezonanță și în special a celei mai joase și a celei mai mari. Pentru rezolvarea acestei probleme vom folosi ecuațiile lui Lagrange.

Vom scrie în acest scop expresiile energiei cinetice și a celei potențiale totale în funcție de coordonatele generalizate X_k ce reprezintă deplasările volumice în cele „n" rezonatoare. Folosind notația $a_k = \frac{A_k}{l_k}$, aceste expresii sînt :

$$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{\rho_k}{a_k} \frac{\dot{X}_k^2}{2} = \rho \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2a_k} \dot{X}_k^2 \tag{16}$$

$$V = \sum_{k=1}^{n=1} \frac{\rho c^2}{2V_k}(X_{k-1} - X)^2 + \frac{\rho c^2}{2V_n} X_n^2 \tag{17}$$

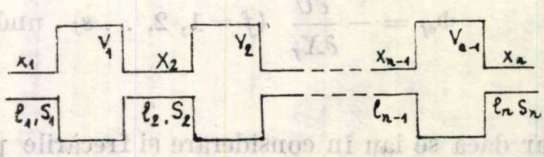


Fig. 3 — Filtru acustic „trece jos"

Întrucît ultimul rezonator comunică cu exteriorul ($V_n = \infty$) energia potențială se poate scrie sub forma :

$$V = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{\rho c^2}{V_k} (X_{k+1} - X_k) \tag{18}$$

Scrierea ecuațiilor lui Lagrange conduce la următorul sistem de ecuații diferențiale de ordinul II :

$$\rho \frac{\ddot{X}_1}{a_1} - \rho \frac{c^2}{v_1}(X_2 - X_1) = 0$$

$$\rho \frac{\ddot{X}_2}{a_2} - \rho \frac{c^2}{v_1}(X_2 - X_1) - \rho \frac{c^2}{v_2}(X_3 - X_2) = 0 \tag{19}$$

. . . . . (19)

. . . . . .

$$\rho \frac{\ddot{X}_{n-1}}{a_{n-1}} + \rho \frac{c^2}{V_{n-2}}(X_{n-1} - X_{n-2}) - \rho \frac{c^2}{V_{n-1}}(X_n - X_{n-1}) = 0$$

$$\rho \frac{\ddot{X}_n}{a_n} + \rho \frac{c^2}{V_{n-1}}(X_n - X_{n-1}) = 0$$

Prin însumarea acestor ecuații se obține o relație de legătură între $\ddot{X}_1$, $\ddot{X}_2$, . . . $\ddot{X}_n$:

$$\frac{\ddot{X}_1}{a_1} + \frac{\ddot{X}_2}{a_2} + \ldots + \frac{\ddot{X}_n}{a_n} = 0 \tag{20}$$

a cărei integrală primă este :

$$\frac{X_1}{a_1} + \frac{X_2}{a_2} + \ldots + \frac{X_n}{a_n} = C_1 t + C_2 \tag{21}$$

Această soluție arată o deplasare uniformă a întregului volum de aer din sistem, care corespunde pulsației ω_1, adică un sistem semidefinit [2].

Pentru calculul pulsației proprii fundamentale și a celei mai ridicate se va folosi în continuare metoda matricială de rezolvare a sistemului de ecuații Lagrange.

Pe baza acestei metode se scrie matricea de rigiditate acustică a sistemului :

$$[K_a] =$$

$$= \rho c^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{V_1} & -\frac{1}{V_1} & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{V_1} & \frac{1}{V_1}+\frac{1}{V_2} & -\frac{1}{V_2} & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -\frac{1}{V_2} & \frac{1}{V_1}+\frac{1}{V_2} & -\frac{1}{V_3} & 0 \ldots 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & -\frac{1}{V_{n-1}} & \frac{1}{V_{n-2}}+\frac{1}{V_{n-1}} & -\frac{1}{V_{n-1}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & -\frac{1}{V_{n-1}} & \frac{1}{V_{n-1}} \end{bmatrix} \tag{22}$$

și matricea de inerție acustică

$$[M_a] = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{a_{n-2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} \tag{23}$$

Se observă că determinantul matricei de rigiditate acustică este zero :

$$\det [K_a] = 0 \tag{24}$$

și deci matricea $[K_a]$ nu permite calculul frecvenței fundamentale proprii, întrucît nu poate fi inversată. Acest inconvenient poate fi evitat printr-un artificiu de calcul după cum se va vedea în cele ce urmează. Din relația

(21) se exprimă una din necunoscute $X_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ în funcție de celelalte $(n-1)$ necunoscute, după care aceasta se introduce în sistemul de ecuații (15).

Sistemul de ecuații ce se obține va fi format, de data aceasta din $n-1$ ecuația cu $(n-1)$ necunoscute mai puțin X_k și a cărei matrice de rigiditate $[K'_a]$ are determinantul diferit de zero.

$$\det [K'_v] \neq 0 \tag{25}$$

ceea ce va permite calculul pulsației fundamentale și a celei superioare folosind metoda iterației matriceale.

Pentru determinarea pulsației fundamentale se folosește ecuația matriceală

$$\{a\} = \omega^2 [\alpha]\{a\}$$

iar pentru determinarea pulsației celei mai mari, ecuația matriceală

$$\{a\} = \frac{1}{\omega^2}[\beta]\{a\}.$$

În aceste ecuații matriceale coeficienții $[\alpha]$ și $[\beta]$ reprezintă matricele :

$$[\alpha] = [K'_a]^{-1}[M'_a] \quad [\beta] = [M'_a][k'_a] \tag{26}$$

în care matricea de inerție $[M'_a]$ este cea corespunzătoare sistemului algebric de $(n-1)$ ecuații cu $(n-1)$ necunoscute.

Concluzii

Ecuațiile lui Lagrange scrise pentru un sistem acustic oferă un procedeu ușor și rapid de determinare a caracteristicilor acustice și a proprietăților de propagare prin acesta. Ecuațiile obținute sînt analoage cu cele cunoscute din mecanică, diferența constînd în natura coordonatelor generalizate și a expresiilor energiei cinetice și potențiale. În acustică coordonatele generalizate se consideră ca fiind doar deplasări volumice, iar forțele generalizate sînt presiuni acustice. Particularitățile care apar, în plus, sînt datorate transmiterii integrale a variațiilor de presiune adiabatice în cavitatea rezonatorului și ca urmare a cuplării elastice pe orice direcție a cavității unui rezonator cu următorul.

Metoda matriceală cunoscută din studiul vibrațiilor unui sistem mecanic se poate aplica la determinarea frecvențelor proprii limită cu mai multă ușurință și rapiditate decît utilizînd analogiile electro-acustice. În lucrare s-a dezvoltat procedeul de calcul al frecvențelor proprii pentru un sistem acustic semidefinit, care își găsește aplicație într-o serie de probleme de reducere a zgomotului și vibrațiilor [3].

BIBLIOGRAFIE

1. *I. Rayleigh*, „The Theory of Sound" London, 1896
2. *L. Meirovitch*, „Elements of vibration Analysis" Mc Graw-Hill 1975

Some Applications of Lagrange Equations Stadying the Acoustic Systems

This paper presents Lagrange equation adapted to complex acoustic system formed by „n" resonators connected in series or in parallel, under mechanic and acoustic analogy.

The theoretical results obtained are used in order to determine the suitable frequances of a reagent attenuator type „pass down". The matrix methods used allows easy calculating of maximum and minimum frequency of the attenuator.

C.Z: 624.043 : 624.042

DETERMINATION OF EXPRESSIONS FOR THE STRESSES CAUSED BY A TANGENTIAL CONCENTRATED FORCE ACTING IN THE BOUNDARY PLANE OF THE HALF-SPACE

C. MICU, I. CURIȚA *

The strains produced in the elastic half-space by the action of a tangential concentrated force (situated in the boundary plane) are studied starting from the Lamé's equations and choosing solutions of the form of harmonic functions. Using adequate boundary conditions, the displacements of any point of the half-space are first determined, with the help of which the expressions of the stresses are subsequently deduced.

In the present paper there is considered that the force acting on the elastic half-space is not normal to the boundary plane, as in the Boussinesq's problem, but it is contained in this plane.

To this purpose, we have to use the Boussinesq's method to establish particular solutions for Lamé's equations, with the help of harmonic functions. Thus, let us consider solutions of the type

$$\left.\begin{aligned} u &= \varphi_1 + z\frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ v &= \varphi_2 + z\frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ w &= \varphi_3 + z\frac{\partial \psi}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

where: u, v and w denote the displacements of any point in the half-space; φ_1, φ_2, φ_3 and ψ are harmonic functions, which must be determined to satisfy Lamé's equations, as the boundary conditions.

To carry out the suggested problem, let us consider the Lamé's equations reduced to three biharmonic independent equations, in the absence of mass forces,

$$\left.\begin{aligned} \Delta u + (k+1)\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x} &= 0, \\ \Delta v + (k+1)\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial y} &= 0, \\ \Delta w + (k+1)\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial z} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

where: $k = \dfrac{2\nu}{1-2\nu}$ is the elastic constant of an isotropic body, ν being

* Reader Ph. D.; Lecturer Ph. D., chair of Fine Mechanics

Poissons's ratio of the material; $\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}$ is the volumetric strain and ε_x, ε_y, ε_z are strains in directions x, y, z. In order to establish the conditions that the functions (1) satisfy Eqs. (2), we must replace (1) into (2). First we calculate the functions ε_v, Δu, Δv and Δw. Thus, differentiating (1) we obtain

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + z\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + z\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + z\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial \psi}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Adding these relationships term-by-term, it results

$$\varepsilon_v = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z} + z\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right). \tag{4}$$

Because the function ψ is harmonic, the last term of the right-hand side of the equation (4) vanishes and consequently

$$\varepsilon_v = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z}. \tag{5}$$

Further we deduce

$$\Delta u = \Delta \varphi_1 + \Delta\left(z\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)$$

and taking into account that the functions φ_1 and ψ are harmonic, we obtain

$$\Delta \varphi_1 = 0 \text{ and } \Delta\left(x\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = 2\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\,\partial z} = 2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) \tag{6}$$

and hence

$$\left.\begin{aligned} \Delta u &= 2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right). \\ \text{Similarly} \\ \Delta v &= 2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right), \\ \Delta w &= 2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Substituting the expressions (5) and (7) into the equation (2) we get

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(2\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) + (k+1)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(2\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) + (k+1)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(2\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) + (k+1)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

The first equation of this system can be rewritten in the form

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[2\frac{\partial \psi}{\partial z}+(k+1)\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}+\frac{\partial \varphi_3}{\partial z}+\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)\right]=0$$

and collecting terms it results

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}\left[(k+1)\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}+\frac{\partial \varphi_3}{\partial z}\right)+(k+3)\frac{\partial \psi}{\partial z}\right]=0.\right\}$$

In the same way, we deduce the other equations of the system

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\left[(k+1)\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}+\frac{\partial \varphi_3}{\partial z}\right)+(k+3)\frac{\partial \psi}{\partial z}\right]&=0,\\ \frac{\partial}{\partial z}\left[(k+1)\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}+\frac{\partial \varphi_3}{\partial z}\right)+(k+3)\frac{\partial \psi}{\partial z}\right]&=0.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

The equations of the system (9) are simultaneously satisfied only if the following condition is accomplished

$$(k+1)\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}+\frac{\partial \varphi_3}{\partial z}\right)+(k+3)\frac{\partial \psi}{\partial z}=K, \tag{10}$$

where K is an arbitrary constant. The last relationship represents the condition that the functions (1) be solutions of the Lamé's equations.

Not altering the generality of Eqs. (10), we can admit $K = D(k + 3)$, where D is a new arbitrary constant. Denoting $\psi = \psi_1 + Dz$, where ψ_1 is, as ψ, a harmonic function, we obtain

$$\frac{\partial \psi}{\partial z}=\frac{\partial \psi_1}{\partial z}+D.$$

Therefore Eq. (10) becomes

$$(k+1)\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}+\frac{\partial \varphi_3}{\partial z}\right)+(k+3)\frac{\partial \psi_1}{\partial z}=0, \tag{11}$$

where from it results the relationship between the harmonic functions φ, φ_1, φ_2, and φ_3, namely

$$\frac{\partial \psi}{\partial z}=-\frac{k+1}{k+3}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}+\frac{\partial \varphi_3}{\partial z}\right). \tag{12}$$

If the functions φ_1, φ_2 and φ_3 are known, it is possible to find the function ψ by means of the equation (12). The determination of the harmonic functions φ_1, φ_2 and φ_3 must be so performed that they satisfy the boundary conditions for $z = 0$. To this end, the origin of the coordinate system is taken in the boundary plane, the axes Ox and Oy being contained just in this plane, and the Oz axis normal to them and oriented to the outside. Also, it is assumed that onto the boundary plane there are given the stresses σ_z, τ_{zx} and τ_{yz} due to the load in the form of functions of the coordinates x and y, namely

$$\sigma_z=\Phi_1(x,y),\qquad \tau_{zx}=\Phi_2(x,y),\qquad \tau_{yz}=\Phi_3(x,y). \tag{13}$$

Since the problem must be solved in terms of displacements as functions of the coordinates of the point of the elastic body, the left-hand sides of the previous equations change according to Hooke's law and Cauchy's

equations and the equations (13) become

$$\left.\begin{aligned} G\left(2\frac{\partial w}{\partial z}+k\,\varepsilon_v\right)&=\Phi_1,\\ G\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)&=\Phi_2,\\ G\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)&=\Phi_3. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Equation (14) are valid only on the boundary plane, i.e. for $z=0$

Now it is assumed that three harmonic functions $\omega_1(x,y,z)$, $\omega_2(x,y,z)$. and $\omega_3(x,y,z)$ are found, which in the limit, i.e. for $z=0$, get the values Φ_1, Φ_2, and Φ_3, differing from the formers only by the factor G, introduced to simplify the subsequent calculations therefore

$$\left.\begin{aligned} G\omega_1(x,y,z)&=\Phi_1(x,y),\\ G\omega_2(x,y,z)&=\Phi_2(x,y),\\ G\omega_3(x,y,z)&=\Phi_3(x,y). \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Further, the expressions of the functions Φ_1, Φ_2 and Φ_3 will be substituted into the right-hand sides of the equations (14), and u, v, w, ε_v in the left-hand sides will be replaced by the expressions (1) and (5), obtaining

$$\left.\begin{aligned} &2\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}+2z\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+2\frac{\partial\psi}{\partial z}+k\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)=\omega_1,\\ &\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}+z\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial x}+z\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial x}=\omega_2,\\ &\frac{\partial\varphi_3}{\partial y}+z\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial z}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}+z\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial z}+\frac{\partial\psi}{\partial y}=\omega_3. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

In this conditions, we take into account only the terms without the factor z (because in the limit we have $z=0$), and the previous equations become

$$\left.\begin{aligned} &2\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}+2\frac{\partial\psi}{\partial z}+k\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)=\omega_1,\\ &\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}+\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial x}=\omega_2,\\ &\frac{\partial\varphi_3}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}+\frac{\partial\psi}{\partial y}=\omega_3. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

It may be observed that, according to equations (5) and (12) the expressions in brackets in the first equation of the system (17) is transformed as follows

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}+\frac{\partial\psi}{\partial z}=-\frac{k+3}{k+1}\frac{\partial\psi}{\partial z}+\frac{\partial\psi}{\partial z}=-\frac{2}{k+1}\frac{\partial\psi}{\partial z} \tag{18}$$

and, consequently, the last equations take the form

$$\left.\begin{aligned} 2\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}+\frac{2}{k+1}\frac{\partial\psi}{\partial z}&=\omega_1,\\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial x}&=\omega_2,\\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial y}&=\omega_3. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Both sides of these relations, valid only on the boundary plane, are harmonic functions. It is well-known that, if two harmonic functions coincide at the boundary surface, they are identical in the whole domain closed by this surface. Hence it results that the equations (19) are valid not only on the boundary plane, but in the entire half-space $z < 0$. This conclusion permits to eliminate the functions φ_1, φ_2 and φ_3 from the equations (19) and (12) and to substitute the function ψ by ω_1, ω_2 and ω_3, which are assumed to be formerly known at each point of the half-space.

To this purpose, the first equation of the system (19) will be differentiated with respect to z, the second with respect to x and the third with respect to y, afterwards, the obtained expressions will be summed term-by-term; therefore a lot of terms will disappear, because φ_1, φ_2, φ_3 and ψ are harmonic functions and thus $\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2 = \Delta\varphi_3 = \Delta\psi = 0$. It is obtained

$$\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial z^2}-\frac{k-1}{k+1}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial z\partial y}=\frac{\partial\omega_1}{\partial z}+\frac{\partial\omega_2}{\partial x}+\frac{\partial\omega_3}{\partial y}, \tag{20}$$

which can be rewritten also in the form

$$-\frac{k-1}{k+1}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}\right)=\frac{\partial\omega_1}{\partial z}+\frac{\partial\omega_2}{\partial x}+\frac{\partial\omega_3}{\partial y}. \tag{21}$$

To eliminate the functions φ_1, φ_2 and φ_3 from the equation (21), we substitute the expression in brackets in accordance with (12) by $-\frac{k+3}{k-1}\frac{\partial\psi}{\partial z}$, obtaining

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial z}+\frac{\partial\omega_2}{\partial x}+\frac{\partial\omega_3}{\partial y}\right). \tag{22}$$

Further, the development of the calculation is based on the following considerations:

— Being given the functions Φ_1, Φ_2 and Φ_3 [see equations (13)], we can find the harmonic functions ω_1, ω_2 and ω_3, which must satisfy the conditions (15) on the boundary plane.

— By integrating twice the equations (22), we determine the function ψ.

— From the equations (19) we deduce the harmonic functions φ_1, φ_2 and φ_3.

— By substituting the expressions of the functions φ_1, φ_2, φ_3 and ψ into the equations (1), we find the displacements u, v and w.

— With the help of Hooke's law, we determine the stresses at each point of the half-space.

In the following, the study will be restricted to the case when the load acting in the boundary plane has a finite value. In this situation,for large z (in a horinzontal section situated at a finite distance) all displacements and stresses tend to zero. This means that, according to the equations (1), for $z \to -\infty$ the function ψ and its first derivatives tend also to zero. This remark is employed to determine ψ from the equation (22). By integrating twice with respect to z, from $z = -\infty$ to an arbitrary value z, it is obtained

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -\int_{-\infty}^{z} \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial z} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + \frac{\partial \omega_3}{\partial y} \right) dz + f_1(x, y),$$

respectively

$$\psi = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{z} \int_{-\infty}^{z} \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial z} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + \frac{\partial \omega_3}{\partial y} \right) dz dz + z f_1(x, y) + f_2(x,y).$$

But, for $z = -\infty$, the left-hand side of the two equations must be equal to zero, according to the previous conditions. Because, in this case, the integrals on the right-hand side reduce also to zero, it results that $f_1(x, y) = f_2(x, y) = 0$ and

$$\psi = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{z} \int_{-\infty}^{z} \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial z} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + \frac{\partial \omega_3}{\partial y} \right) dz dz. \tag{23}$$

By analogy with Boussinesq's problem, in our case the conditions on the boundary plane are the following :

— the functions $\Phi_1 = \Phi_3 = 0$ on the entire boundary plane, which leads to the conclusion that, in the whole half-space we have

$$\omega_1 = \omega_3 = 0 ; \tag{24}$$

— the function Φ_2 vanishes on the entire boundary plane, excepting the origin of the coordinate system ($x = y = 0$), chosen at the point of application of the load, where it is infinite. We must only find the function $\omega_2(x, y, z)$ from the condition that on the boundary plane ($z = 0$) it should be equal to zero, excepting the origin of the coordinate system ($x = y = z = 0$) where it is singular, or has an infinite value.

Since ω_2 is of the same order of magnitude as the stresses, in addition this must :

— increase at infinity as $\frac{1}{r^2}$;

— be a harmonic function, i.e. to satisfy the equation $\Delta \omega_2 = 0$ in the entire half-space, excepting the origin of the coordinate system.

All the mentioned conditions are satisfied by a harmonic function having the form

$$\omega_2 = \frac{Kz}{r^3}, \tag{25}$$

where :

— K is an arbitrary integration constant, depending on the magnitude of the load P and whose value is going to be further established;

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ is the vector radius which links the origin of the coordinate system to any point having the coordinates x, y, z. Now we can pass to the determination of the function ψ given by the equation (23) which, taking into account the conditions (24) and (25), becomes

$$\psi = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{z}\frac{\partial \omega_2}{\partial x}\,dz\,dz, \tag{26}$$

where

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{K z}{r^3}\right) = \left(-\frac{3r^2}{r^6}\,r'_x\right)Kz, \quad r'_x = \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial \omega_2}{\partial x} = -\frac{3x}{r^5}\,Kz,$$

thus

$$\psi = \frac{3Kx}{2}\int_{-\infty}^{z} dz \int_{-\infty}^{z} \frac{z\,dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}.$$

Quadrating the integral, it results

$$\psi = -\frac{Kxz}{2r(x^2 + y^2)} - \frac{Kx}{2(x^2 + y^2)} = -\frac{Kxz}{2(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{Kx}{2(x^2 + y^2)}. \tag{27}$$

Now we can deduce the functions φ_1, φ_2 and φ_3 by means of equations (19) which become, taking into account the expressions (24) and (25),

$$\left.\begin{aligned} 2\frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + \frac{2}{k+1}\frac{\partial \psi}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{K z}{r^3}, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

The first partial derivatives of the harmonic function ψ (27) are

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{Kz}{2r^3(x^2 + y^2)^2}(2x^4 - y^4 + x^2y^2 + x^2z^2 - y^2z^2) + \frac{K(x^2 - y^2)}{2(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \frac{Kxyz}{2r^3(x^2 + y^2)^2}(3x^2 + 3y^2 + 2z^2) + \frac{Kxy}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} &= -\frac{K x}{2r^3}. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

The first equation of the system (28) can be written in the form

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = -\frac{1}{k+1}\frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

Replacing here $\frac{\partial \psi}{\partial z}$ by the expression $\frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{Kx}{2r^3}$, integrating and

considering the constant of integration equal to zero, it results the function

$$\varphi_3 = -\frac{1}{k+1}\psi = \frac{K}{2(k+1)}\frac{xz}{r(x^2+y^2)} + \frac{K}{2(k+1)}\frac{x}{x^2+y^2}. \tag{30}$$

Using the second equation of the system (28), we can find the function φ_1 in the following way:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = \frac{Kz}{r^3} - \frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\varphi_3}{\partial x}, \text{ where } \frac{\partial\varphi_3}{\partial x} = -\frac{1}{k+1}\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

therefore:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = \frac{Kz}{r^3} - \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{1}{k+1}\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{Kz}{r^3} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\left(\frac{1}{k+1} - 1\right) = \frac{Kz}{r^3} - \frac{k}{k+1}\frac{\partial\psi}{\partial x} =$$

$$\frac{Kz}{r^3} - \frac{Kk}{2(k+1)}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{Kk}{2(k+1)}\frac{z}{r^3(x^2+y^2)^2}(2x^4 - y^4 + x^2y^2 + x^2z^2 - y^2z^2).$$

Integrating the last expression, it is obtained

$$\varphi_1 = -\frac{K}{r} + \frac{Kk}{2(k+1)}\frac{2x^4 - y^4 + x^2y^2 - (2x^4 - 2y^4 + x^2z^2 - y^2z^2)}{r(x^2+y^2)^2} - \frac{Kk}{2(k+1)}\frac{z(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

or

$$\varphi_1 = -\frac{K}{r} + \frac{Kk}{2(k+1)}\frac{y^4 + x^2y^2 + y^2z^2 - x^2z^2}{r(x^2+y^2)^2} - \frac{Kk}{2(k+1)}\frac{z(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}. \tag{31}$$

Finally, from the third equation of the system (28) we obtain the function φ_2, calculating first

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} = -\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\varphi_3}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{1}{k+1}\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial y}\left(\frac{1}{k+1} - 1\right) =$$

$$= -\frac{k}{k+1}\frac{\partial\psi}{\partial y},$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} = -\frac{Kk}{2(k+1)}\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\frac{z(3x^2+3y^2+2z^2)}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} - \frac{Kk}{k+1}\frac{xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} = -\frac{Kk}{2(k+1)}\frac{xy(3x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}\frac{z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} - \frac{Kk}{2(k+1)}\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\frac{z^3}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} - \frac{Kk}{k+1}\frac{xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} = -\frac{3Kk}{2(k+1)}\frac{xy}{x^2+y^2}\frac{z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} - \frac{Kk}{k+1}\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\cdot\frac{z^3}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} - \frac{Kk}{k+1}\frac{xy}{(x^2+y^2)^2},$$

and integrating

$$\varphi_2 = -\frac{Kk}{2(k+1)}\frac{xy(x^2+y^2+2z^2)}{r(x^2+y^2)^2} - \frac{Kk}{k+1}\frac{xyz}{(x^2+y^2)^2}. \tag{32}$$

The following step consists in determining the displacements u, v, w, of the points lying on the boundary plane. To this purpose, we will consider the expressions (1) of the displacements with respect to the harmonic functions φ_1, φ_2, φ_3 and ψ. Taking into account the relationships (29), (30), (31) and (32), the solutions (1) are transformed so that the displacements u, v and w should depend on the coordinates x, y, z of the point situated on the half-space, the constant K and the elastic constant k; therefore :

$$u = -\frac{K}{r} + \frac{Kk}{2(k+1)}\frac{y^4+x^2y^2+y^2z^2-x^2z^2}{r(x^2+y^2)^2} + \frac{Kz^2}{2r^3(x^2+y^2)^2}(2x^4-y^4+ \\ + x^2y^2 + x^2z^2 - y^2z^2) + \frac{K}{2(k+1)}\frac{z(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}; \tag{33}$$

$$v = -\frac{Kk}{2(k+1)}\frac{xy(x^2+y^2+2z^2)}{r(x^2+y^2)^2} + \frac{Kxyz^2}{2r^3(x^2+y^2)^2}(3x^2+3y^2+2z^2) + \\ + \frac{K}{k+1}\frac{xyz}{(x^2+y^2)^2}; \tag{34}$$

$$w = +\frac{K}{2(k+1)}\frac{xz}{r(x^2+y^2)} + \frac{K}{2(k+1)}\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{Kxz}{2r^3}. \tag{35}$$

Eventually we must deduce the expression of the volumetric strain, necessary to determine the stresses. To this reason we shall use the equation (5) where, taking into account the expression (18), it results $\varepsilon_v = -\frac{2}{k+1}\frac{\partial\psi}{\partial z}$, or, replacing $\frac{\partial\psi}{\partial z}$ by the third equation of the expression (29), it is obtained

$$\varepsilon_v = +\frac{1}{k+1}\frac{Kx}{2r^3}. \tag{36}$$

Knowing the expressions (33), (34), (35) and (36), we can establish the expressions of the stresses on the basis of the Hooke's law and Cauchy's equations, thus :

$$\sigma_x = \lambda\varepsilon_v + 2G\,\varepsilon_x, \quad \sigma_y = \lambda\varepsilon_v + 2G\,\varepsilon_y, \quad \sigma_z = \lambda\varepsilon_v + 2G\,\varepsilon_z, \\ \tau_{yz} = G\gamma_{yz}, \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx}, \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \tag{37}$$

where the strains have the expressions

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \tag{38}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \tag{39}$$

and the Lamé's constants (G is the shear modulus) are

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

obviously E being the Young's modulus.

Beforehand, using the equations (33), (34) and (35) we shall first calculate the partial derivatives of u, v and w, obtaining

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{Kx}{r^3}+\frac{K}{2}\frac{k}{k+1}\frac{x}{r^3(x^2+y^2)^3}(-3y^6-6x^2y^4-9y^4z^2-3x^4y^2-$$
$$-6x^2y^2z^2+3x^4z^2+2x^2z^4-6y^2z^4)+\frac{Kz^2}{2}\frac{x}{r^5(x^2+y^2)^3}(-6x^6+9y^6+$$
$$+12x^2y^4+15y^4z^2-3x_4y^2+10x^2y^2z^2-5x^4z^2-2x^2z^4+6y^2z^4)+$$
$$+\frac{Kz}{k+1}\frac{x(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3}; \tag{40}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{Ky}{r^3}+\frac{K}{2}\frac{k}{k+1}\frac{y}{r^3(x^2+y^2)^3}(2x^6-y^6+3x^4y^2+6x^2y^2z^2+9x^4z^2+$$
$$+6x^2z^4-3y^4z^2-2y^2z^4)+\frac{K}{2}\frac{yz^2}{r^5(x^2+y^2)^3}(-12x^6+3y^6-21x^4y^2-$$
$$-6x^2y^4-10x^2y^2z^2-15x^4z^2-6x^2z^4+5y^4z^2+2y^2z^4)$$
$$-\frac{Kz}{k+1}\frac{y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}; \tag{41}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{Kz}{r^3}+\frac{k}{k+1}\frac{Kz}{2r^3(x^2+y^2)^2}(y^4-2x^4-x^2y^2-x^2z^2+y^2z^2)+$$
$$+\frac{Kz}{2r^5(x^2+y^2)^2}(4x^6-2y^6+6x^4y^2-2x^4z^2-x^2y^2z^2+y^4z^2+4x^4z^2+$$
$$x^2z^4-4y^4z^2-y^2z^4)+\frac{K}{2(k+1)}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}; \tag{42}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{K}{2}\frac{k}{k+1}\frac{y}{r^3(x^2+y^2)^3}(2x^6-y^6+3x^4y^2+6x^2y^2z^2+9x^4z^2+6x^2z^4$$
$$-3y^4z^2-2y^2z^4)+\frac{K}{2}\frac{yz^2}{r^5(x^2+y^2)^3}(-12x^6+3y^6-21x^4y^2-6x^2y^4-$$
$$-15x^4z^2-10x^2y^2z^2+5y^4z^2-6x^2z^2+2y^2z^4)+\frac{K}{k+1}\frac{yz(-3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^3}; \tag{43}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{K}{2}\frac{k}{k+1}\frac{x}{r^3(x^2+y^2)^3}(-x^6+2y^6+3x^2y^4+6x^2y^2z^2+9y^4z^2+6y^2z^4$$
$$-3x^4z^2-2x^2z^4)+\frac{K}{2}\frac{xz^2}{r^5(x^2+y^2)^3}(3x^6-12y^6-21x^2y^4-6x^4y^2-$$
$$-15y^4z^2-10x^2y^2z^2+5x^4z^2-6y^2z^4+2x^2z^4)+\frac{K}{k+1}\frac{xz(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}; \tag{44}$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{K}{2}\frac{k}{k+1}\frac{xyz}{r^3(x^2+y^2)^2}(3x^2+3y^2+2z^2)+\frac{K}{2}\frac{xyz}{r^5(x^2+y^2)^2}$$
$$(6x^4+6y^4+12x^2y^2+2z^4+5x^2z^2+5y^2z^2)+\frac{K}{k+1}\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}; \tag{45}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{1}{2(k+1)}\frac{Kz}{r^3(x^2+y^2)^2}(y^4-2x^4-x^2y^2-x^2z^2+y^2z^2)-$$

$$-\frac{Kz}{2r^3}+\frac{3}{2}\frac{Kx^2z}{r^5}+\frac{K}{2(k+1)}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}; \tag{46}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=-\frac{Kxyz}{2(k+1)}\frac{1}{r^3(x^2+y^2)^2}(3x^2+3y^2+2z^2)-\frac{Kxy}{k+1}\frac{1}{(x^2+y^2)^2}+\frac{3Kxyz}{2r^5}; \tag{47}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{Kx}{2r^5}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{x^2+y^2-2z^2}{r^2}\right). \tag{48}$$

Substituting the expressions (40 .. 48) into the relationships (37) we deduce the component stresses in terms of the coordinates of the point where they act in the half-space, as follows:

$$\sigma_x=K\left\{\frac{\lambda x}{r^3(k+1)}+2G\left[\frac{x}{r^3}+\frac{k}{2(k+1)}\frac{x}{r^3(x^2+y^2)^3}(-3y^6-6x^2y^4-\right.\right.$$
$$-9y^4z^2-3x^4y^2-6x^2y^2z^2+3x^4z^2+2x^2z^4-6y^2z^4)+$$
$$+\frac{xz^2}{2r^5(x^2+y^2)^3}(-6x^6+9y^6+12x^2y^4+15y^4z^2-3x^4y^2+10x^2y^2z^2-5x^4z^2-$$
$$\left.\left.-2x^2z^4+6y^2z^4)+\frac{xz(-x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^3}\right]\right\}; \tag{49}$$

$$\sigma_y=K\left\{\frac{\lambda x}{r^3(k+1)}+2G\left[\frac{k}{2(k+1)}\frac{x}{r^3(x^2+y^2)^3}(-x^6+2y^6+3x^2y^4+\right.\right.$$
$$+6x^2y^2z^2+9y^4z^2+6y^2z^4-3x^4z^2-2x^2z^4)+\frac{xz^2}{2r^5(x^2+y^2)^3}(3x^6-12y^6-21x^2y^4-$$
$$\left.\left.-6x^4y^2-15y^4z^2-10x^2y^2z^2+5x^4z^2-6y^2z^4+2x^2z^4)+\frac{xz(x^2-3y^2)}{(k+1)(x^2+y^2)^3}\right]\right\}; \tag{50}$$

$$\sigma_z=K\left\{\frac{\lambda x}{r^3(k+1)}+2G\left[\frac{x}{2r^3}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{x^2+y^2-2z^2}{r^2}\right)\right]\right\}; \tag{51}$$

$$\tau_{xy}=GK\left[\frac{y}{r^3}+\frac{k}{k+1}\frac{x}{r^3(x^2+y^2)^3}(2x^6-y^6+3x^4y^2+6x^2y^2z^2+9x^4z^2+6x^2z^2-\right.$$
$$-3y^4z^2-2y^2z^4)+\frac{yz^2}{r^5(x^2+y^2)^3}(-12x^6+3y^6-21x^4y^2-6x^2y^4-10x^2y^2z^2-$$
$$\left.-15x^4z^2-6x^2z^4+5y^4z^2+2y^2z^4)+\frac{2}{k+1}\frac{yz(-3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^3}\right]; \tag{52}$$

$$\tau_{xy}=3KG\frac{xyz}{r^5}; \tag{53}$$

$$\tau_{zx}=\frac{GKz}{2r^3}\left\{1+\frac{3x^2}{r^2}+\frac{1}{(x^2+y^2)^2}[y^4-2x^4-x^2y^2+z^2(-x^2+y^2)]-\right.$$
$$-\frac{1}{r^2(x^2+y^2)^2}[-4x^6+2y^6-6x^4y^2-y^4z^2+2x^4z^2+x^2y^2z^2+z^2(-x^2+y^2)+$$
$$\left.+z^2(-4x^4+4y^4+y^2z^2-x^2z^2)]\right\}. \tag{54}$$

Eventually we may determine the arbitrary constant K in the expressions of the stresses. To that aim in view, we shall write the equilibrium equation for any section of the half-space parallel to the boundary plane

$$\iint \tau_{zx} dA = -T, \tag{55}$$

where T represents the tangential load.

According to the expression of τ_{zx} in the system (37) and γ_{zx} in (39), it results

$$\iint \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) dA = -\frac{T}{G}. \tag{56}$$

To perform the integration, we shall use polar coordinates, the surface element being $dA = \rho \, d\rho \, d\varphi$ and $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, consequently $x^2 + y^2 = \rho^2$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Integrating term-by-term, at first with respect to φ, between the limits 0 and 2π and then with respect to ρ, between the limits 0 and ∞, after summing the results, we get the value of the constant

$$K = -\frac{T}{2G}. \tag{57}$$

REFERENCES

1. *T. Demian*, Elemente constructive de mecanică fină. Editură Didactică şi Pedagogică Bucureşti, 1980.
2. *M. M. Filonenko-Borodilsch*, Elastizitätstheorie. VEB Fachbuchverlag, Leipzig, 1967.
3. *J. Fröhlich*, Technika uložěni s valivýmilozisky, SNTL-Nakladatelstvi technicke literatury Praha, 1978.
4. *T. A. Harris*, Rolling Bearing Analysis. John Wiley & Sons. Inc., New York—London — —Sydney, 1966.
5. *S. D. Ponomariov ş.a.*, Calculul de rezistenţă în construcţia de maşini, vol. II (trad. din limba rusă). Editura Tehnică, Bucureşti, 1963.

Determinarea relaţiilor tensiunilor cauzate de acţiunea unei sarcini concentrate în planul limită al semispaţiului

În lucrare se studiază tensiunile produse în semispaţiul elastic de către acţiunea unei forţe concentrate situată în planul limită. Se porneşte de la ecuaţiile lui Lamé şi se caută soluţii de forma unor funcţii armonice. Utilizîndu-se condiţii la limită adecvate se determină mai întîi deplasările unui punct oarecare din semispaţiu cu ajutorul cărora rezultă expresiile tensiunilor.

C.Z. :621.646 :621.798

CALCULUL REDUCTOARELOR CUTIILOR DE VITEZE ȘI TRANSMISIILOR SUPUSE LA SOLICITAREA DE RĂSUCIRE PRIN ȘOC

V. DROBOTĂ *

În această lucrare se stabilesc relațiile necesare pentru calculul tensiunilor tangențiale, rotirilor specifice și deplasărilor unghiulare la reductoare, cutii de viteze și transmisii supuse la solicitarea de răsucire prin șoc.

Se arată, de asemenea, necesitatea unui asemenea calcul și se dau recomandări pentru proiectare.

1. Ipoteze de calcul

Pentru stabilirea relațiilor de calcul necesare se fac următoarele ipoteze :

1) Se admite valabilitatea teoremei lui Clapeyron, după care lucrul mecanic produs de sarcinile aplicate ce produc șocul (L), este egal cu energia de deformație a arborilor solicitați la răsucire ce intră în alcătuirea reductorului cutiei de viteze sau transmisiei respective.

2) Se consideră un reductor alcătuit din mai mulți arbori ce-și transmit puterea prin intermediul unor angrenaje, lucrînd în regim staționar.

3) Materialul arborilor se consideră liniar elastic și solicitat în domeniul elastic.

4) Nu se ia în considerație în calcul masa proprie a arborilor.

5) Se au în vedere două cazuri de încărcare și anume :

— cînd reductorul lucrează în sarcină ;

— cînd reductorul lucrează în gol.

6) Șocul se produce prin blocarea extremităților arborelui de ieșire al reductorului.

2. Relații de calcul

Aceste ipoteze se traduc prin următoarele relații între tensiunile, deplasările și eforturile ce se produc în arborii rductorului și cele ce se produc dacă sarcinile sînt aplicate static,

* Conf. dr. ing., catedra Rezistența materialelor

respectiv

$$\tau = \psi\tau_{st}\,;\quad \varphi = \psi\varphi_{st}\,;\quad M_t = \psi M_{tst}\,;\quad \theta = \psi\theta_{st} \tag{1}$$

unde :

φ, τ sînt deplasările unghiulare respectiv tensiunile tangențiale produse în arbori datorită sarcinilor ce produc șocul;

φ_{st}, τ_{st} — aceleași mărimi pentru sarcinile aplicate static;

M_t — momentele de răsucire produse în arbori datorită sarcinilor ce produc șocul;

M_{tst} — aceleași mărimi în arbori datorită sarcinilor aplicate static;

ψ — un coeficient dinamic numit multiplicator de impact;

θ, θ_{st} — rotirile specifice produse în arbori datorită sarcinilor ce produc șocul și aplicate static.

2.1. *Reductoare în sarcină solicitate prin șoc la blocarea arborelui la ieșire*

Pentru sistemul de arbori din figura 1, ce transmite prin extremitatea liberă a arborelui 1 un cuplu M_1 supus la solicitarea prin șoc blocînd secțiunea liberă a arborelui n, avînd m volanți au fost folosite următoarele notații :

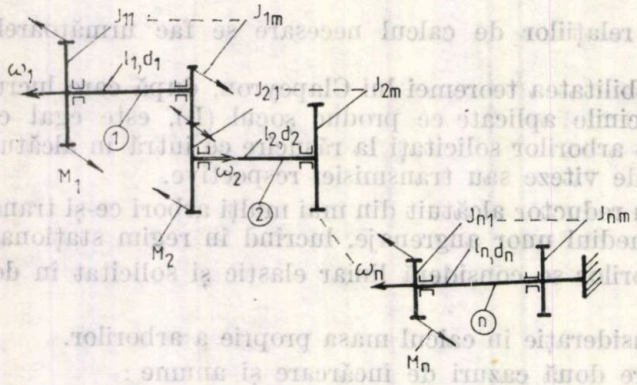


Fig. 1

ω_i — este viteza unghiulară a arborelui i;

M_i — cuplul transmis de arborele i;

J_{ij} — momentul de inerție masic al roții dințate sau volantului j montat fix pe arborele i;

l_i, d_i — lungimea, respectiv diametrul arborelui i.

În regim staționar pentru acest reductor, lucrul mecanic produs de sarcini este

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n}\left[\omega_i^2\sum_{j=1}^{j=m} J_{ij}\right] + \sum_{i=1}^{i=n} M_{ti}\varphi_i \tag{2}$$

unde φ_i este deplasarea unghiulară relativă a celor două secțiuni ale arborelui i în care sînt situate roțile dințate sau volanții $1 \ldots m$, iar M_{ti} momentul de răcire din același arbore.

Ținînd seama de relațiile (1), (2) devine

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n}\left[\omega_1^2\sum_{j=1}^{j=m} J_{ij}\right] + \psi\sum_{i=1}^{i=n} M_{tst_i}\varphi_i = L_0 + 2\psi L_{st} \tag{3}$$

$$L_0 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n}\left[\omega_i^2\sum_{j=1}^{j=m} J_{ij}\right] \quad (4) \quad \text{și} \quad L_{st} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n}\int_{li} M_{tst_i}\varphi_{st_i} \tag{5}$$

Energia de deformație acumulată de arbori se obține din relația

$$U = \sum_{i=1}^{i=n}\int_{V_i}\frac{\tau_i^2}{2G}\,dV = \psi^2\sum_{i=1}^{i=n}\int_{V_i}\frac{\tau_{ist}^2}{2G}\,dV = \psi^2 L_{st} \tag{6}$$

Ținînd seama de teorema lui Clapeyron se poate scrie egalitatea

$$L_0 + 2\psi L_{st} = \psi^2 L_{st}$$

din care rezultă ecuația

$$\psi^2 - 2\psi - \frac{L_0}{L_{st}} = 0 \tag{7}$$

respectiv relația ce dă multiplicatorul de impact

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{L_0}{L_{st}}} \tag{8}$$

Înlocuind L_0 și L_{st} din (4) și (5) rezultă

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{\sum_{i=1}^{i=n}\left[\omega_i^2\sum_{j=1}^{j=m} J_{ij}\right]}{\sum_{i=1}^{i=n} M_{tst_i}\varphi_{st_i}}} \tag{9}$$

Produsul $M_{tst_i}\ \varphi_{st_i}$ este pozitiv dacă cuplul M_{tst_i}, din capătul de intrare al arborelui i are același sens cu vectorul ω_i.

Precizări:

În legătură cu relațiile generale (8) și (9) ce dau expresia multiplicatorului de impact ψ sînt de făcut următoarele precizări:

1. Dacă

$$\frac{L_0}{L_{st}} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n}\left[\omega_i^2 \sum_{j=1}^{j=m} J_{ij}\right]}{\sum_{i=1}^{i=n} M_{tst_i}\varphi_{st_i}} \geqslant 10 \tag{10}$$

multiplicatorul de impact ψ poate fi calculat cu o eroare de 5% folosind formula prescurtată;

$$\psi = 1 + \sqrt{\frac{L_0}{L_{st}}} = 1 + \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n}\left[\omega_i^2 \sum_{j=1}^{j=m} J_{ij}\right]}{\sum_{i=1}^{i=n} M_{tst_i}\varphi_{st_i}}} \tag{11}$$

2. Dacă

$$\frac{L_0}{L_{st}} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n}\left[\omega_i^2 \sum_{j=1}^{j=m} J_{ij}\right]}{\sum_{i=1}^{i=n} M_{tst_i}\varphi_{st_i}} \geqslant 400 \tag{12}$$

multiplicatorul de impact poate fi calculat cu o eroare de 5% folosind următoarea formulă aproximativă

$$\psi = \sqrt{\frac{L_0}{L_{st}}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n}\left[\omega_i^2 \sum_{j=1}^{j=n} J_{ij}\right]}{\sum_{i=1}^{i=n} M_{tst_i}\varphi_{st_i}}} \tag{13}$$

Dacă se scrie că

$$\sum_{i=1}^{i=n} M_{tst_i}\varphi_{st_i} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{M_i^2 l_i}{GI_{pi}} = \frac{M_1^2\omega_1^2}{G} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{l_i}{\omega_i^2 I_{p_i}} \tag{14}$$

relaţiile (9), (11) şi (13) devin

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{G\sum_{i=1}^{i=n}\left[\omega_i^2 \sum_{j=1}^{j=m} J_{ij}\right]}{M_1^2\omega_1^2 \sum_{i=1}^{i=n} \frac{l_i}{\omega_i^2 I_{pi}}}} \tag{15}$$

$$\psi = \sqrt{1 + \frac{G\sum_{i=1}^{i=n}\left[\omega_i^2 \sum_{j=1}^{j=m} J_{ij}\right]}{M_1^2\omega_1^2 \sum_{i=1}^{i=n} \frac{l_i}{\omega_i^2 I_{pi}}}} \tag{16}$$

$$\psi = \frac{1}{M_1\omega_1} \sqrt{\frac{G\sum_{i=1}^{i=n}\left[\omega_i^2 \sum_{j=1}^{j=m} J_{ij}\right]}{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{l_i}{\omega_i^2 I_{pi}}}} \tag{17}$$

3. Dacă nu se ține seama de masa corpului lovit (ce preia șocul), calculul cu ajutorul acestor relații este un calcul acoperitor.

Dacă masa proprie a arborilor este foarte mare valoarea multiplicatorului de impact tinde către $\psi = 2$.

4. În cazul folosirii formulei aproximative (17) calculul tensiunii tangențiale maxime în arborele k, a rotirii specifice θ_k și a unghiului de rotație al secțiunii situate la ieșirea arborelui k se face cu relațiile ce se stabilesc în cele ce urmează.

Calculul tensiunii tangențiale într-un arbore oarecare k se obține cu relația

$$\tau_k = \psi \tau_{stk} \tag{18}$$

Ținînd seama că

$$\tau_{stk} = \frac{M_{stk}}{W_{pk}} = \frac{M_1 \omega_1}{W_{pk} \omega_k} \tag{19}$$

și folosind relația simplificată pentru ψ respectiv (17) rezultă

$$\tau_k = \frac{1}{M_1 \omega_1} \sqrt{\frac{G \sum_{i=1}^{i=n} \left[\omega_i^2 \sum_{j=1}^{j=m} J_{ij} \right]}{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{l_i}{\omega_i^2 I_{pi}}}} \cdot \frac{M_1 \omega_1}{W_{pk} \omega_k} = \frac{1}{\omega_k W_{pk}} \sqrt{\frac{G \sum_{i=1}^{i=n} \left[\omega_i^2 \sum_{j=1}^{j=m} J_{ij} \right]}{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{l}{\omega_i^2 I_{pi}}}} \tag{20}$$

Rotirea specifică în arborele k se obține cu relația

$$\theta_k = \frac{\tau_k}{G R_k} \tag{21}$$

unde $R_k = \frac{d_k}{2}$ este raza arborelui k.

Calculul unghiului de rotire al secțiunii de intrare a arborelui k față, de secțiunea de ieșire a arborelui blocat n, folosind formula simplificată pentru ψ (13), se obține cu relația

$$\varphi_{kn} = \psi \varphi_{stkn} \quad (22); \quad \varphi_{kn} = \frac{1}{M_1 \omega_1} \sqrt{\frac{G \sum_{i=1}^{i=n} \left[\omega_i^2 \sum_{j=1}^{j=m} J_{ij} \right]}{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{l}{\omega_i^2 I_{pi}}}} \cdot \frac{M_1 \omega_1}{G} \sum_{i=k}^{i=n} \frac{l_i}{\omega_i I_{pi}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n} \left[\omega_i^2 \sum_{j=1}^{j=m} J_{ij} \right]}{G \left[\sum_{i=1}^{i=k} \frac{l_i}{\omega_i^2 I_{pi}} + 1 \right]}} \tag{23}$$

Deoarece relaţiile (20), (21) şi (23) sînt independente de încărcare, depinzînd numai de momentele de inerţie masice şi de dimensiunile geometrice şi materialul arborilor, rezultă că în relaţiile generale (8) şi (9) ce dau pe al doilea termen de sub radical reprezintă contribuţia la valoarea multiplicatorului de impact al mersului în gol al reductorului.

2.2. *Reductoare ce se rotesc în gol solicitate prin şoc la blocarea arborelui de ieşire* (*fig.* 2).

Pentru acest caz expresiile lucrului mecanic de deformaţie L şi al energiei de deformaţie U sînt

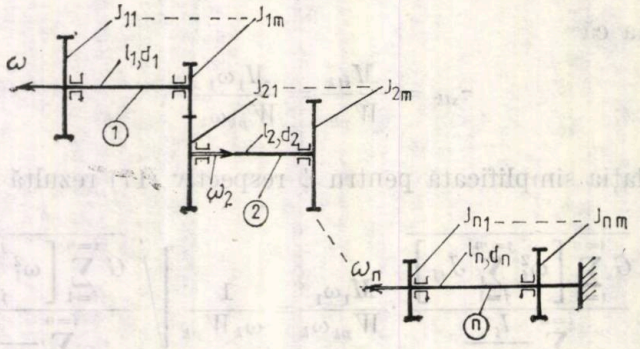


Fig. 2

$$L = L_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} \left[\omega_i^2 \sum_{j=1}^{j=m} J_{ij} \right] \tag{24}$$

respectiv

$$U = \sum_{i=1}^{i=n} \int_{l_i} \frac{M_{ji}\varphi_i}{2} = \sum_{i=1}^{i=n} \int_{l_i} \frac{M_{ti}dx}{2GI_{pi}} = \psi^2 \sum_{i=1}^{i=n} \int_{l_i} \frac{M_{tsti}\varphi_{stt}}{2} =$$

$$= \psi^2 \sum_{i=1}^{i=n} \int_{l_i} \frac{M_{tsti}\mathrm{d}x}{2GI_{pi}} = \psi^2 \sum_{i=1}^{i=n} \frac{M_{tsti}^2 l_i}{2G_{pi}I} = \tag{25}$$

În care M_{tsti} reprezintă un moment static fictiv care produce în arborele i acelaşi efect cu şocul produs de blocarea arborelui de ieşire al reductorului

Din teorema lui Clapeyron rezultă

$$L_0 = \psi^2 L_{st}$$

de unde

$$\psi = \sqrt{\frac{L_0}{L_{st}}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n}\left[\omega_i^2 \sum_{j=1}^{j=m} J_{ij}\right]}{\sum_{i=1}^{i=n} M_{tsti}\varphi_{sti}}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n}\left[\omega_i^2 \sum_{j=1}^{j=m} J_{ij}\right]}{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{M_i^2 l_i}{GI_{pi}}}} =$$

$$= \frac{1}{M_1\omega_1}\sqrt{\frac{G\sum_{i=1}^{i=n}\left[\omega_i^2 \sum_{j=1}^{j=m} J_{ij}\right]}{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{l_i}{\omega_i^2 I_{pi}}}} \tag{26}$$

aceeași cu formula (17) ce poate fi folosită ca formula aproximativă de calcul la reductoarele funcționînd în sarcină solicitate prin șoc prin blocarea extremității arborelui de ieșire n.

Pentru calculul tensiunilor tangențiale și al rotirilor specifice într-un arbore oarecare se pot folosi relațiile (20) și (21) iar pentru calculul deplasării unghiulare al secțiunii de intrare a arborelui k față de secțiunea de ieșire a arborelui blocat n se poate folosi formula (23).

Admițind ipoteza că energia de deformație volumică acumulată de un arbore oarecare i este constantă (energia de deformație a acestuia este minimă) rezultă :

$$\frac{U_1}{V_1} = \frac{U_2}{V_2} = \ldots\ldots\ldots = \frac{U_i}{V_i} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} U_i}{\sum_{i=1}^{i=n} V_i} = \frac{U}{\sum_{i=1}^{i=n} V_i} \tag{27}$$

Din relația ce dă energia de deformație U_i acumulată de arborele i, rezultă

$$U_i = \frac{M_i^2 l_i}{2GI_{pi}} = \frac{M_i^2 l_i W_{pi}^2}{2GW_{pi}^2 I_{pi}} = \frac{M_i^2}{2GW_{pi}^2}\frac{V_i}{2} = \frac{\tau_{ti}^2}{4G} V_i \tag{28}$$

Din (27) și (28) se obține

$$\frac{U_i}{V_i} = \frac{\tau_{ti}^2}{4G} \tag{29}$$

Din (27) și (29) rezultă că ;

$$\tau_{t1} = \tau_{t2} = \ldots = \tau_{ti} = \ldots \tau_{tn} = \tau_t = ct \tag{30}$$

Ţinînd seama de (30), (14) devine

$$\sum_{i=1}^{i=1} M_{tsti}\varphi_{sti} = \frac{\tau_{st}^2}{2G}\sum_{i=1}^{i=n} V_i \tag{31}$$

Din relaţia (13) ţinînd seama de (31) rezultă că:

$$\psi = \sqrt{\frac{2G\sum_{i=1}^{i=n}\left[\omega_i^2\sum_{j=1}^{j=m} J_{ij}\right]}{\frac{M_1^2}{W_{p1}^2}\sum_{i=1}^{i=n} V_i}} = \frac{1}{\tau_{tst}}\sqrt{\frac{2G\sum_{i=1}^{i=n}\left[\omega_i^2\sum_{j=1}^{j=m} J_{ij}\right]}{\sum_{i=1}^{i=n} V_i}} \tag{32}$$

Tensiunea tangentială τ_t este dată de relaţia

$$\tau = \psi\tau_{st} = \sqrt{\frac{2G\sum_{i=1}^{i=n}\left[\omega_i^2\sum_{j=1}^{j=m} J_{ij}\right]}{\sum_{i=1}^{i=n} V_i}} \tag{33}$$

Răsucirea specifică se obţine din relaţia

$$\theta_k = \frac{\tau}{GR_k} \tag{34}$$

Unghiul de rotire al secţiunii de intrare a arborelui k faţă de secţiunea de ieşire a arborelui blocat n se obţine cu relaţia

$$\varphi_{kn} = \psi\varphi_{stkn} = \tau W p_1\omega_1\sum_{i=k}^{i=n}\frac{l_i}{\omega_i Ip_i} \tag{35}$$

Pentru calculul tensiunilor tangenţiale într-un arbore oarecare k şi a unghiului de rotire al secţiunii de intrare a arborelui k faţă de secţiunea de ieşire a arborelui blocat n, la mersul în gol se folosesc relaţiile (17) şi (19).

Relaţiile (20), (21), şi (23) nu depind de momentul static M_1 şi în consecinţă în cazul folosirii relaţiilor generale ale lui ψ, τ_k şi φ_k respectiv (14), (17) şi (19) ce conţin această mărime, pentru calculul mărimilor ce interesează la mersul în gol, se înlocuieşte în aceste relaţii $M_1 = 1$.

3. Concluzii

1. Calculul multiplicatorului de impact, ψ, la reductoarele funcţionînd în sarcină, în regim staţionar, solicitate prin şoc, prin blocarea arborelui de ieşire, se face cu ajutorul relaţiilor generale (8) şi (9), respectiv (15). În aceste relaţii primul termen reprezintă efectul cuplului transmis de arborele de intrare aplicat static. Primul termen de sub radical reprezintă efectul aceluiaşi cuplu aplicat dinamic ($\omega = 0$) iar al doilea termen de sub radical reprezintă contribuţia maselor în mişcare de rotaţie ale arborilor la mersul în gol, în regim staţionar, la blocarea extremităţii arborelui de ieşire.

2. Calculul tensiunii tangențiale maxime și al rotirii specifice într-un arbore oarecare k la reductoarele funcționînd în sarcină, se obține cu ajutorul relațiilor generale (18), (20) și (21) iar al unghiului de rotire al secțiunii de intrare a arborelui k față de secțiunea blocată a arborelui n se face cu ajutorul relațiilor generale (22) sau (23).

3. Calculul multiplicatorului de impact ψ, la reductoarele funcționînd în gol, în regim staționar, solicitate prin șoc, prin blocarea arborelui de ieșire se face cu ajutorul relațiilor (17) și (26) în care $M_1 = 1$ sau cu ajutorul relației (32).

4. Calculul tensiunii tangențiale maxime și a rotirii specifice într-un arbore oarecare k la reductoarele funcționînd în gol se obține cu ajutorul relațiilor (20), respectiv (21) în care $M_1 = 1$ iar cel al unghiului de rotire al secțiunii de intrare a arborelui k față de secțiunea blocată a arborelui n se face cu ajutorul relațiilor (22) sau (23).

Cele mai importante relații de calcul sînt prezentate în tabelul 1.

Tabelul 1

Relațiile de calcul ale multiplicatorului de impact ψ, tensiuni tangențiale τ_k, τ, rotirii specifice θ_k și deplasării unghiulare $\Delta\varphi_{kn}$ pentru arborii reductoarelor, cutiilor de viteze și transmisiilor supuse la răcire prin șoc

Nr. crt.	Cazul de încărcare	ψ	τ_k, τ	θ_k	$\Delta\varphi_{kn}$
1	Fig. 1	$1+\sqrt{1+\dfrac{G\sum_{i=1}^{i=n}\left[\omega_i^2\sum_{j=1}^{j=m}J_{ij}\right]}{M_1^2\omega_1^2\sum_{i=1}^{i=n}\dfrac{l_i}{\omega_i^2 I_{pi}}}}$	$\psi\dfrac{M_1\omega_1}{W_{pk}\omega_k}$	$\dfrac{\tau_k}{GR_k}$	$\psi\dfrac{M_1\omega_1}{G}\sum_{i=k}^{i=n}\dfrac{l_i}{\omega_i I_{pi}}$
2	Fig. 2	—	$\sqrt{\dfrac{2G\sum_{i=1}^{i=n}\left[\omega_1^2\sum_{j=1}^{j=m}J_{ij}\right]}{\sum_{i=1}^{i=n}V_i}}$	$\dfrac{\tau}{GR_k}$	$\tau W_p\omega_1\sum_{i=k}^{i=n}\dfrac{l_i}{\omega_i I_{pi}}$

5. Exemplu de calcul

La reductorul cu roți dințate cilindrice cu o treaptă reprezentat schematic în figura 3 se dau:

— Puterea transmisă $P = 15{,}7$ kW;
— Turația arborelui de intrare $n = 1000$ rot/min;
— Raportul de transmisie $i = 2$;
— Distanța $l = 250$ mm;
— Lățimea roților dințate $b = 2$ cm;
— Diametrul $D = 7$ cm;
— Rezistența admisibilă la răsucire a arborilor $\tau_{at} = 15$ MPa;
— Răsucirea specifică admisibilă a arborilor $\theta_a = 1°/\text{m}$;
— Densitatea materialului arborilor și roților dințate $\rho = 7800$ kg/m^3;

— Modulul de elasticitate transversal al materialului arborilor $G = 8 \cdot 10^4$ M Pa.

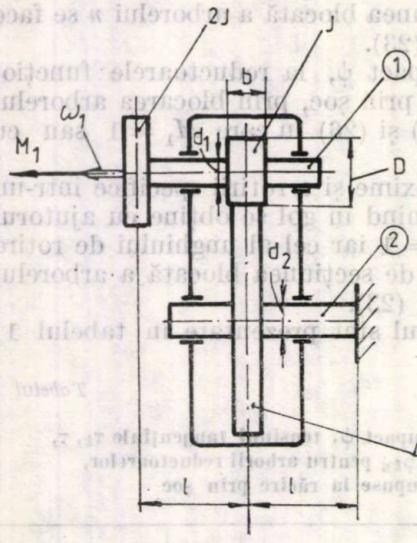


Fig. 3

Se cere să se calculeze tensiunile tangențiale și răsucirile specifice în arborii reductorului cînd extremitatea de ieșire a reductorului este blocată, atît la mersul în gol cît și în sarcină.

Rezolvare.

Momentul de răsucire din arborele 1.

$$M_1 = M_{t1} = 9550 \frac{N}{n} = 9550 \cdot \frac{15{,}7}{1000} = 150 \text{ Nm}.$$

Momentul de răsucire din arborele 2.

$$M_{t2} = 2M_{t1} = 2 \cdot 150 = 300 \text{ Nm}.$$

Viteza unghiulară de rotație a arborelui 1 respectiv 2.

$$\omega_1 = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 1000}{30} = 104{,}33 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{2} = \frac{104{,}66}{2} = 52{,}33 \text{ rad/s}$$

— Momentul de inerție masic J

$$J = \frac{PD^2}{8} = \frac{\pi D^4}{32} bP = \frac{\pi_1 \cdot 7^4 \cdot 10^{-8}}{32} \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 7800 = 0{,}375 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$$

— Diametrul celor doi arbori calculați din condiția de rezistență sînt :

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{M_{t1}}{\tau_{at}} \frac{16}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi} \frac{150}{15 \cdot 10^6}} = 3{,}707 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 37{,}07 \text{ mm}$$

$$d_2 = \sqrt[3]{\frac{M_{t2}}{\tau_{at}} \frac{16}{\bar{n}}} = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi} \frac{300}{15 \cdot 10^6}} = 4{,}67 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 46{,}70 \text{ mm}$$

— Diametrele celor doi arbori calculați din condiția de rezistență sînt :

$$d_1 = \sqrt[4]{\frac{32\, M_{t1}}{\pi G \theta_a}} = \sqrt[4]{\frac{32}{\pi} \frac{150 \cdot 180}{8 \cdot 10^{10} \pi}} = 3{,}23 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 32{,}3 \text{ mm}$$

$$d_2 = \sqrt[4]{\frac{32}{\pi} \frac{M_{t2}}{G\theta_a}} = \sqrt[4]{\frac{32}{\pi} \frac{300 \cdot 180}{8 \cdot 10^{10} \cdot \pi}} = 3{,}84 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 38{,}4 \text{ mm}$$

Se aleg pentru cei doi arbori diametrele normale

$$d_1 = 40 \text{ mm}; \; d_2 = 50 \text{ mm},$$

pentru care momentele de inerție și modulele de rezistență polare sînt :

$$I_{p1} = \frac{\pi d_1^4}{32} = \frac{\pi(4\cdot 10^{-2})^4}{32} = 25{,}13\cdot 10^{-8}\,\text{m}^4; \; I_{p2} = \frac{\pi d_2^4}{32} = \frac{\pi(5\cdot 10^{-2})^4}{32} =$$

$$= 61{,}36\cdot 10^{-8}\,\text{m}^4$$

$$W_{p1} = \frac{2I_{p1}}{d_1} = \frac{25{,}13\cdot 10^{-8}}{20\cdot 10^{-3}} = 12{,}565\cdot 10^{-6}\,\text{m}^3; \; W_{p2} =$$

$$= \frac{2I_{p2}}{d_2} = \frac{61{,}36\cdot 10^{-8}}{25\cdot 10^{-3}} = 24{,}544\cdot 10^{-6}\,\text{m}^3$$

Calculul multiplicatorului de impact cu formula exactă (15) duce la valoarea

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{G\sum_{i=1}^{i=n}\left[\omega_i^2 \sum_{j=1}^{j=m} J_{ij}\right]}{M_1^2\omega_1^2 \sum_{i=1}^{i=n} \frac{l_i}{\omega_i^2 I_{pi}}}} = 1 + \sqrt{1 + 22{,}18} = 5{,}82$$

Tensiunile tangențiale maxime și rotirile specifice din cei doi arbori sînt :

$$\tau_1 = \psi\tau_{st1} = \psi\frac{M_{t1}}{W_{p1}} = 5{,}82\cdot\frac{150}{12{,}566\cdot 10^{-6}} = 69{,}5\,\text{MPa}$$

$$\tau_2 = \psi\tau_{st2} = \psi\frac{M_{t2}}{W_{p2}} = 5{,}82\,\frac{300}{24{,}544\cdot 10^{-6}} = 71{,}137\,\text{MPa}$$

$$\theta_1 = \frac{2\tau_1}{Gd_1} = \frac{69{,}5\cdot 10^6}{8\cdot 10^{10}\cdot 20\cdot 10^{-3}} = 0{,}043\,\text{rad/m} = 2{,}49\,\text{grd/m}$$

$$\theta_2 = \frac{2\tau_2}{Gd_2} = \frac{71{,}137\cdot 10^6}{8\cdot 10^{10}\cdot 25\cdot 10^{-3}} = 0{,}03556\,\text{rad/m} = 2{,}03\,\text{grd/m}$$

5.2. *Calculul reductorului la mers în gol*

Tensiunile tangenţiale şi rotirile specifice în cei doi arbori se obţin cu relaţiile (33) şi (34) şi rezultă :

$$\tau = \sqrt{\frac{2G\sum_{i=1}^{i=n}\left[\omega_i^2\sum_{j=1}^{j=m}J_{ij}\right]}{\sum_{i=1}^{i=n}V_i}} = \sqrt{\frac{2G\left[(2J+J)\omega_1^2+\frac{4J\omega_1^2}{4}\right]}{\frac{\pi l}{4}(d_1^2+d_2^2)}} =$$

$$= \omega_1\sqrt{\frac{32GJ}{\pi l(d_1^2+d_2^2)}} = 10{,}66\sqrt{\frac{32\cdot 8\cdot 10^{10}\cdot 0{,}375\cdot 10^{-3}}{\pi\cdot 0{,}25\,(40^2+50^2)10^{-6}}} = 57{,}145 \text{ MPa};$$

$$\theta_1 = \frac{2\tau}{Gd_1} = \frac{57{,}145\cdot 10^6}{8\cdot 10^{10}\cdot 20\cdot 10^{-3}} = 0{,}0357 \text{ rad/m} = 2{,}045 \text{ grd/m};$$

$$Q_2 = \frac{2\tau}{Gd_2} = \frac{57{,}145\cdot 10^6}{8\cdot 10^{10}\cdot 25\cdot 10^{-3}} = 0{,}0286 \text{ rad/m} = 1{,}637 \text{ grd/m}.$$

4. *Concluzii şi recomandări pentru proiectare*

Din analiza valorilor tensiunilor tangenţiale obţinute în exemplul de calcul, rezultă următoarele concluzii :

1. Cele mai mari tensiuni tangenţiale s-au obţinut în cazul blocării reductorului la mersul în sarcină, valoarea maximă a acestora fiind în medie de 70 M Pa, de aproape 5 ori valoarea admisibilă luată în calcul, apropiată de limita de curgere a materialelor folosite pentru realizarea unor astfel de arbori ($\tau_c = 100$ M Pa).

Aceste valori pot fi reduse, în general, prin folosirea unor momente de inerţie masice de valori cît mai mici.

2. La blocarea reductorului la mersul în gol, valorile tensiunilor tangenţiale sînt totdeauna mai mici, apropiate de valorile celor obţinute la mersul în sarcină.

3. Din concluziile prezentate la 1 şi 2 rezultă că, în vederea prevenirii ruperii arborilor ce intră în componenţa reductoarelor, cutiilor de viteze sau transmisiilor, este necesară verificarea lor la solicitarea de răsucire prin şoc cînd acestea lucrează în sarcină.

BIBLIOGRAFIE

1. V. *Drobotă*, Rezistenţa materialelor, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982.
2. V. *Drobotă*, Calculul tensiunilor şi deplasărilor unghiulare ale arborilor cu discuri ataşate (volanţi) supuşi la răsucire prin şoc, Buletinul Institutului Politehnic Bucureşti, 1986.

La détermination des contraintes et des déplacements angulaires des arbres des reducteurs, des boîtes à vitesses et des transmissions soumisses au choc

Dans cet article on établissent les relations nécessaires pour le calcul des contraintes et des déplacements angulaires des arbres des reducteurs, des boîtes à vitesses et des transmissions soumisses au choc.

Sont presentées aussi des recomandations nécessaires pour le calcul de ces arbres.

C.Z. :624.043 :624.044

METODA DE CALCUL APROXIMATIV A DEFORMAȚIILOR ȘI TENSIUNILOR ÎNTR-O PLACĂ SUB ACȚIUNEA UNEI CIOCNIRI TRANSVERSALE

M. MUNTEANU*

Studiul ciocnirii naturale transversale a unei plăci. s-a făcut prin modelarea plăcii în punctul de ciocnire cu un oscilator simplu format dintr-o masă echivalentă și un arc cu constanta elastică a plăcii în punctul de ciocnire. S-au stabilit domeniile raportului dintre masa redusă a plăcii și masa corpului care ciocnește funcție de coeficientul de restituire pentru care au loc una sau două ciocniri în prima semiperioadă a oscilației. S-au calculat deformațiile maxime pentru fiecare din cazuri, expresiile acestora fiind funcții de deformația statică și de un factor dinamic. Expresiile masei reduse și a deformației statice au fost calculate pentru cazul unei plăci dreptunghiulare omogene încastrată pe contur ciocnită centric.

În final s-a stabilit algoritmul de calcul pentru determinarea deformației maxime și a stării de tensiune.

1. Introducere

Determinarea stării de tensiune într-un punct presupune determinarea deformației în acel punct. În cele ce urmează este prezentată o metodă de calcul bazată pe folosirea unui model mecanic format dintr-un oscilator liniar cu un grad de libertate, în sensul că placa elastică este redusă la o masă echivalentă sprijinită elastic.

Se consideră o ciocnire e transversală naturală ($0 < k < 1$) și se presupune că durata ciocnirii este mult mai mică decît un sfert din perioada vibrației plăcii după ciocnire. În această ipoteză deformația plăcii în timpul ciocnirii poate fi neglijată, deci studiul ciocnirii propriu-zise și cel al deformației plăcii după ciocnire pot fi analizate independent unul de altul, iar efectele locale se neglijează.

O metodă similară pentru studiul ciocnirii transversale plastice a unei bare este formulată în lucrarea [1].

2. Modelul de calcul

Se consideră o placă de grosime constantă ciocnită normal la suprafață în punctul $M(x_0, y_0)$ de un corp rigid cu masa m și viteza înainte de ciocnire v. Placa este asimilată cu un oscilator liniar cu un grad de libertate cu m_e și c masa echivalentă în punctul M și respectiv constanta

* Șef lucrări dr. ing., catedra Mecanică.

elastică a plăcii în punctul M. Se notează cu v şi $v_1 = 0$ vitezele înainte de ciocnire iar cu v' şi v_1' vitezele după ciocnire ale corpului şi respectiv plăcii în punctul M.

Pentru cazul cînd viteza v' are acelaşi sens cu viteza v, din relaţiile de conservare a impulsului şi de definiţie a coeficientului de restituire după direcţia normală k se obţine

$$v' = \frac{1 - \frac{m_e}{m}}{\frac{m_e}{m} + 1} v; \quad v_1' = \frac{1 + k}{1 + \frac{m_e}{m}} v \tag{1}$$

cu inegalitatea de condiţie

$$m > m_e k \tag{2}$$

Analiza sistemului real pe baza modelului propus, presupune în primul rînd determinarea masei echivalente m_e funcţie de configuraţia plăcii : condiţiile la limită şi ipoteza de deformabilitate admisă.

Se consideră un sistem de referinţă $xOyw$ astfel încît planul xOy coincide cu suprafaţa medie nedeformată. Ecuaţia după ciocnire a suprafeţei medii deformate poate fi considerată de forma

$$w(x, y, t) = Z(x, y)\ \varphi(t) \tag{3}$$

Într-o primă aproximaţie, forma suprafeţei medii dată de ecuaţia $Z = Z(x, y)$ poate fi asimilată cu cea obţinută prin acţiunea unei sarcini statice în punctul ciocnirii sau cu cea a primului mod propriu de vibraţie. Deformaţia plăcii în punctul ciocnirii este

$$w_M = Z_M(x_M, y_M)\varphi(t) = Z_M\varphi(t) \tag{4}$$

Ţinînd seama de relaţia (3), se presupune că în momentul ciocnirii toate secţiunile plăcii primesc instantaneu vitezele

$$\dot{w}_0 = \dot{w}(x, y, 0) = Z(x, y)\dot{\varphi}(0) \tag{5}$$

Conform teoremei lui Carnot, pierderea de energie în timpul ciocnirii egală cu energia cinetică a vitezelor pierdute este

$$\Delta E = \frac{m}{2}(v - v')^2 + \frac{1}{2}\iint \rho \dot{w}_0\, dx\, dy =$$

$$= \frac{mv^2}{2} - \frac{mv'^2}{2} - \frac{1}{2}\iint \rho \dot{w}_0^2\, dx\, dy \tag{6}$$

unde $\rho = \rho(x, y)$ reprezintă masa unităţii de suprafaţă.

În relația (6) s-au neglijat termenii datorați armonicilor superioare. Din relația (6) rezultă

$$mv'(v - v') + \iint \rho i w_0^2 \, dx \, dy = 0 \tag{7}$$

iar din relațiile (4) și (5)

$$w_0 = \frac{Z(x, y)}{Z_M} v_1' \tag{8}$$

Înlocuind (8) în (7) și ținînd seama de a doua relație (1) se obține

$$v_1'^2 - v_1' v(1 + 2k)\mu_r + v^2 k(1 + k)\mu_r = 0 \tag{9}$$

unde s-a notat

$$\mu_r = \frac{m}{m + m_M} \tag{10}$$

$$m_M = \iint \rho \left(\frac{Z(x, y)}{Z_M} \right)^2 dx \, dy \tag{11}$$

Mărimea m_M are semnificația unei mase reduse a plăcii în punctul M. Într-adevăr, dacă masa plăcii este

$$m_p = \iint \rho \, dx \, dy \tag{12}$$

atunci

$$m_M = K_M m_p \tag{13}$$

$$K_M = \frac{1}{m_p} \iint \rho \left(\frac{Z(z, y)}{Z_M} \right)^2 dx \, dy \tag{14}$$

se numește coeficient de reducere.

Din ecuația (9) se obține

$$v_1' = \varepsilon v \tag{15}$$

unde s-a notat

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left[(1 + 2k)\mu_r \pm \sqrt{(1 + 2k)^2 \mu_s^2 - 4k(1 + k)\mu_r} \right] \tag{16}$$

Introducînd (16) în a doua relaţie (1) se obţine

$$m_e = m\left(\frac{1+k}{\varepsilon} - 1\right) \tag{17}$$

Condiţia necesară $\frac{1+k}{\varepsilon} - 1 > 0$ conduce la $\mu_r > 1$, îndeplinită întotdeauna pentru semnul $+$ în faţa radicalului din relaţia (16). Aceeaşi condiţie conduce la $\mu_r < 1$ pentru semnul $-$ în faţa radicalului din relaţia (16) deci această relaţie nu are semnificaţie fizică.

Pentru ciocnirea plastică ($k = 0$), $\varepsilon = \mu_r$ şi $m_e = m_M$.

Pentru a stabili domeniile de valabilitate ale modelului propus se analizează următoarele situaţii posibile.

1. Vitezele v' şi v_1' au acelaşi sens.

Ţinînd seama de relaţia (17) inegalitatea (2) devine

$$\varepsilon > 1 \tag{18}$$

Studiul inegalităţii (18) utilizînd relaţia (16) conduce la două sisteme simultane de inegalităţi

$$\frac{m_M}{m} \leqslant \frac{1}{4k(k+1)} \; ; \quad \frac{m_M}{m} < k - \frac{1}{2} \tag{19}$$

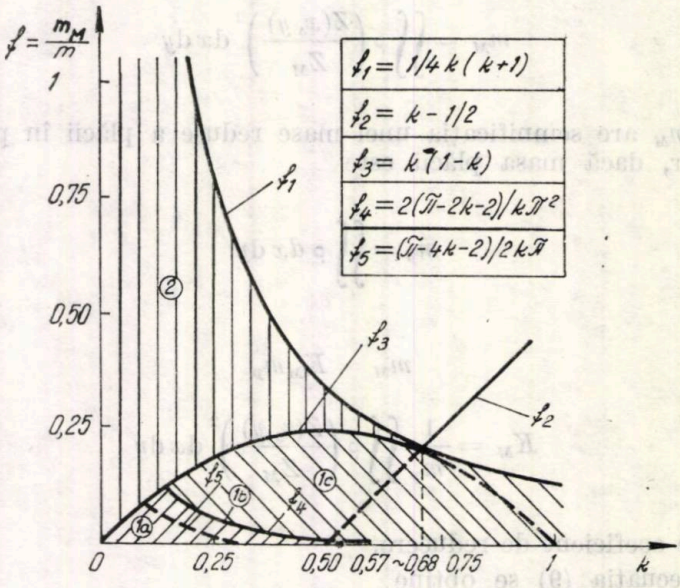


Fig. 1

şi

$$\frac{m_M}{m} \leqslant \frac{1}{4k(k+1)} \; ; \quad \frac{m_M}{m} < k(1-k) \; ; \quad \frac{m_M}{m} > k - \frac{1}{2} \tag{20}$$

ce definesc domeniul de existenţă al ansamblului valorilor m_M/m şi k reprezentat cu haşură înclinată în fig. 1.

2. Vitezele v' și v_1' au sensuri contrare.
Expresiile vitezelor după ciocnire sînt

$$v' = \frac{k\frac{m_e}{m} - 1}{1 + \frac{m_e}{m}} v; \quad v_1' = \frac{1 + k}{1 + \frac{m_e}{m}} v; \tag{21}$$

iar relațiile (16) și (17) se păstrează.

Relația de condiție $m/m_e k$ respectiv

$$\varepsilon < 1 \tag{22}$$

conduce la sistemul de inegalități

$$\frac{m_M}{m} \leqslant \frac{1}{4k(k+1)}; \quad \frac{m_M}{m} > (1 - k); \quad \frac{m_M}{m} > k - \frac{1}{2} \tag{23}$$

ce delimitează domeniul cu haşură verticală din fig. 1.

În primul caz este posibilă o a doua ciocnire în prima semiperioadă a oscilației. Considerînd viteza v' constantă pînă la a doua ciocnire, momentul acestei ciocniri este dat de soluția ecuației transcendente

$$v't = \frac{v_1'}{p} \sin pt \tag{24}$$

În fig. 2 este reprezentată soluția grafică a acestei ecuații.

Pot fi distinse următoarele cazuri.

1a. Ciocnirea se întîmplă în prima semiperioadă cînd $v_1' > v' > 2v_1'/\pi$. Ținînd seama de relațiile (1), (10), (15) și (17), această inegalitate conduce la sistemul de inegaţităţi simultane

$$\frac{m_M}{m} > \frac{\pi - 4k - 2}{2k\pi}; \tag{25}$$

$$\frac{m_M}{m} < 2\frac{\pi - 2k - 2}{k\pi^2}$$

și

$$\frac{m_M}{m} < \frac{\pi - 4k - 2}{2k\pi}; \tag{26}$$

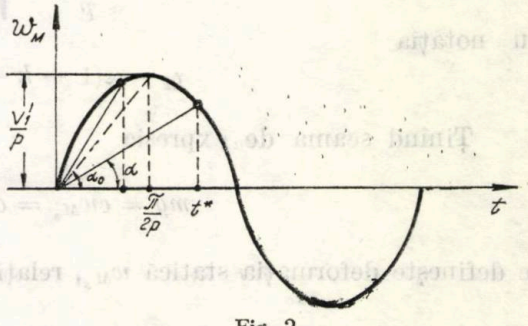


Fig. 2

1b. Ciocnirea se întîmplă în momentul amplitudinii maxime cînd $v' = 2v_1'/\pi$ echivalentă cu

$$\frac{m_M}{m} > \frac{\pi - 4k - 2}{2k\pi}; \quad \frac{m_M}{m} = 2\frac{\pi - 2k - 2}{k\pi^2} \tag{27}$$

1c. Ciocnirea se întîmplă în a doua semiperioadă cînd $0 < v' < 2v_2'/\pi$, echivalentă cu

$$\frac{m_M}{m} > \frac{\pi - 4k - 2}{2k\pi} \; ; \quad \frac{m_M}{m} > 2\frac{\pi - 2k - 2}{k\pi^2} \tag{28}$$

Domeniile delimitate de aceste inegalităţi sînt incluse în domeniile (19) şi (20), reprezentate prin haşuri înclinate în fig. 1, exclusiv cazul 1 b pentru care valorile se află pe curba (27).

3. Calculul deformaţiilor

După prima ciocnire, sistemul oscilant echivalent va efectua o oscilaţie liberă de ecuaţie

$$w_M = \frac{v_1'}{p} \sin pt \tag{29}$$

unde

$$p = \sqrt{\frac{c}{m_e}} = \sqrt{\frac{c}{m}\frac{\varepsilon}{1 + k - \varepsilon}} \tag{30}$$

În cazul 2, deformaţia maximă este amplitudinea acestei mişcări deoarece în prima semiperioadă după ciocnire nu se întîmplă altă ciocnire, iar în situaţia unei ciocniri acţionate, nu se va întîmpla o nouă ciocnire după prima.

Deformaţia maximă în punctul M este

$$w_{Mm} = \frac{v_1'}{p} = v\sqrt{\frac{m}{c}\eta_2} \tag{31}$$

cu notaţia

$$\eta_2 = \varepsilon(1 + k - \varepsilon) \tag{32}$$

Ţinînd seama de expresia

$$mg = cw_{M_s} = cZ_M \tag{33}$$

ce defineşte deformaţia statică w_{M_s}, relaţia (31) poate fi scrisă astfel

$$W_{M_s} = \beta_2\sqrt{Z} \tag{34}$$

unde

$$\beta_2 = v\sqrt{\frac{\eta_2}{g}} \tag{35}$$

reprezintă un factor dinamic.

În cazul 1, deformația maximă a plăcii după a doua ciocnire poate fi mai mare sau mai mică decît amplitudinea oscilației. În calcule se va considera deformația maximă. Momentul celei de a doua ciocniri t^* este dat de soluția ecuației (24), care ținînd seama de (1) și (17) se pune sub forma adimensională

$$\tau = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - p} \sin \tau; \quad \tau = pt \tag{36}$$

Ecuația oscilației libere după a doua ciocnire este

$$w_M = \sqrt{w_0^2 + \frac{v_2'^2}{p^2}} \sin(pt + \alpha) \tag{37}$$

unde

$$w_0 = \frac{v_1'}{p} \sin \tau^* = \frac{\varepsilon v}{p} \sin \tau^* (38); \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{w_0 p}{v_1'} \tag{39}$$

$$\varepsilon^* = pt^*$$

Viteza punctului M după a doua ciocnire v_1'' este

$$v_1'' = v_1' \cos \tau^* + \frac{(v' - v_1' \cos\tau^*)(1 + k)}{1 + \frac{m_e}{m}} \tag{40}$$

unde $v_1' \cos\tau$ reprezintă viteza punctului M înainte de a doua ciocnire.

Introducînd (1) (15) și (17) se obține

$$v_1' = \varepsilon[(1 - \varepsilon)\cos \tau^* + \varepsilon - k]\, v \tag{41}$$

Ținînd seama de (36) și (41), amplitudinea oscilației (37) devine

$$w_{Mm} = \beta_1 \sqrt{Z_M} \tag{42}$$

unde

$$\beta_1 = v \sqrt{\frac{\eta_1}{g}} \tag{43}$$

$$\eta_1 = \varepsilon(1 + k - 3)\{\sin^2 \tau^* + [(1 - \varepsilon)\cos \tau^* + \varepsilon - k]^2\} \tag{44}$$

Pentru cazurile analizate avem : $\cos \tau^* > 0$ — cazul 1a, $\cos \tau^* = 0$ — cazul 1b, și $\cos \tau^* < 0$ cazul 1c.

În consecință, problema deformației maxime se reduce la calculul deformației statice a plăcii în punctul ciocnirii sub acțiunea greutății corpului care ciocnește și la determinarea factorului dinamic β_1 sau β_2.

4. Placă dreptunghiulară încastrată pe contur cioenită centric

Pentru a exemplifica modul de calcul al deformaţiei statice şi a masei reduse, se consideră o placă dreptunghiulară omogenă cu dimensiunile a şi b, asupra căreia acţionează în centrul de simetrie forţa $P = mg$. Considerînd sistemul de referinţă plasat în centrul de simetrie şi axele paralele cu laturile plăcii, ecuaţia diferenţială a suprafeţei medii deformate este

$$\frac{\mu^4 Z}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 Z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 Z}{\partial y^4} = \frac{P}{D}\delta(x)\delta(y) \tag{46}$$

unde

$$D = \frac{Eh^2}{12}\frac{1}{1-\mu^2};$$

μ — constanta lui Poisson;
E — modulul de elasticitate longitudinal;
h — grosimea plăcii; δ — funcţia lui Dirac.

Soluţia acestei ecuaţii este [2]

$$Z(x,y) = \frac{Pa^2}{2\pi^3 D}\sum_{i=1,3,5..}^{\infty}\frac{1}{i^3}\cos\frac{i\pi x}{a}\left[\left(\operatorname{th}\alpha_i - \frac{\alpha_i}{\operatorname{ch}^2\alpha_i}\right)\operatorname{ch}\frac{i\pi y}{a} - \operatorname{sh}\frac{i\pi y}{a} - \right.$$

$$\left. - \frac{i\pi y}{a}\operatorname{th}\alpha_i \cdot \operatorname{sh}\frac{i\pi y}{a} + \frac{i\pi y}{a}\operatorname{ch}\frac{i\pi y}{a}\right] \tag{46}$$

unde

$$\alpha_i = \frac{i\pi b}{2a} \tag{47}$$

Se observă că seria (46) este rapid convergentă (termenii se împart cu i^3), astfel încît este suficient să se aleagă primii termeni care conduc la o valoare suficient de exactă. Din (46) rezultă deformaţia plăcii în punctul 0 (00).

$$Z(0,0) = Z_0 = \frac{Pa^2}{2\pi^3 D}\sum_{i=1,3,5..}^{\infty}\frac{1}{i^3}\left(\operatorname{th}\alpha_i - \frac{\alpha_i}{\operatorname{ch}^2\alpha_i}\right) \tag{48}$$

Relaţia (48) se mai poate scrie

$$Z_0 = \alpha\frac{Pa^2}{D} \tag{49}$$

unde pentru $\mu = 0{,}3$, coeficientul α este dat în tabelul 1.

Tabelul 1

$\frac{a}{b}$	1.0	1.1	1.2	1,4	1,6	1,8	2,0	3,0	
α	0,0116	0,01265	0,01353	0,0148	0,0157	0,0162	0,0165	0,0169	0,0169

Pentru calculul masei reduse a plăcii în punctul 0, trebuie calculată integrala (11) unde apare $Z^2(x, y)$ și Z_0^2. Deoarece calculul este laborios chiar și pentru cîțiva termeni ai seriilor (46) și (48), se determină o expresie analitică orientativă luînd în considerare numai primul termen al seriei (46

Notînd

$$I_1 = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} Z_1^2(x, y)\,dx\,dy \tag{50}$$

după efectuarea calculelor se obține

$$I_1 = \frac{P^2 a^5}{8\pi^2 D^2}\left\{\left(\operatorname{th}\alpha_1 - \frac{\alpha_1}{\operatorname{ch}^2\alpha_1}\right)\left(\frac{b}{2} + \frac{a}{2\pi}\operatorname{sh}\frac{\pi b}{a}\right) + \frac{a}{2\pi}\operatorname{sh}\frac{\pi b}{a} - \frac{b}{2} + \right.$$

$$+ \frac{\pi^2}{a^2}\operatorname{th}^2\alpha_1\left[\frac{ab^2}{8\pi}\operatorname{sh}\frac{\pi b}{a} - \frac{b^3}{24} - \frac{a^2}{2\pi^2}\left(\frac{b}{2}\operatorname{ch}\frac{\pi b}{a} - \frac{a}{2\pi}\operatorname{sh}\frac{\pi b}{a}\right)\right] + \tag{51}$$

$$+ \frac{\pi^2}{a^2}\left[\frac{ab^2}{8\pi}\operatorname{sh}\frac{\pi b}{a} + \frac{b^3}{24} - \frac{a^2}{2\pi}\left(\frac{b}{2}\operatorname{ch}\frac{\pi b}{a} - \frac{a}{2\pi}\operatorname{sh}\frac{\pi b}{a}\right)\right] - \frac{2\pi}{a}\operatorname{th}\alpha_1\left(\operatorname{th}\alpha_1 - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{\alpha_1}{\operatorname{ch}^2\alpha_1}\right)\left(\frac{ab}{4\pi}\operatorname{ch}\frac{\pi b}{a} - \frac{a^2}{4\pi^2}\operatorname{sh}\frac{\pi b^2}{a}\right) - \frac{4\pi}{a}\left(\frac{ab}{\pi}\operatorname{ch}\frac{\pi b}{a} - \frac{a^2}{4\pi^2}\operatorname{sh}\frac{\pi b}{a}\right)\right\}$$

Expresia masei reduse într-o primă aproximație va fi deci

$$m_{01} = \frac{\rho}{Z_{01}^2} I_1 \tag{52}$$

unde

$$Z_{01} = \frac{Pa^2}{2\pi^3 D}\left(\operatorname{th}\alpha_1 - \frac{\alpha_1}{\operatorname{ch}^2\alpha_1}\right) \tag{53}$$

Expresia deformației statice ce apare în relațiile (35) și (42) este dată de relația (42) sau de relația aproximativă (53).

Integrarea ecuației (46) cînd forța P acționează într-un punct oarecare $M(x_0, y_0)$ nu prezintă dificultăți.

5. Calculul tensiunilor din placă

Starea de tensiune într-un punct al plăcii este dată de relaţiile [3]

$$\sigma_x = -\frac{2G\mu z}{1-\mu}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{2-\mu}{6}z^2 - \frac{h^2}{4}\right)\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\Delta w)\right]$$

$$\sigma_y = -\frac{2G\mu z}{1-\mu}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\frac{2-\mu}{6}z^2 - \frac{h^2}{4}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\Delta w)\right]$$

$$\tau_{xy} = -\frac{2G\mu z}{1-\mu}\left[(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} - \left(\frac{2-\mu}{6}z^2 - \frac{h^2}{4}\right)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\Delta w)\right] \quad (54)$$

$$\tau_{yx} = -\frac{G}{1-\mu}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)\frac{\partial}{\partial y}(\Delta w)$$

$$\tau_{zy} = -\frac{G}{1-\mu}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)\frac{\partial}{\partial x}(\Delta w)$$

unde z — cota punctului considerat din interiorul plăcii, măsurat faţă de suprafaţa medie;
G — modulul de elasticitate transversal;
$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ — operator diferenţial.

Pentru determinarea stării de tensiune de-a lungul dreptei verticale de ecuaţie $x = x_0$, $y = y_0$ ce trece prin punctul de ciocnire M, în relaţiile (54) se introduce expresia (34) sau (42) sub forma

$$w_m = \beta\sqrt{Z(x,y)} \quad (55)$$

unde β poate fi β_1 sau β_2.

Operatorii de derivare din relaţiile (54) se aplică astfel

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\beta}{2\sqrt{z}}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{2z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)\Bigg|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}};$$

$$\Delta w = \frac{\beta}{2\sqrt{z}}\left(\Delta z - \frac{1}{2z}\delta z\right)\Bigg|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}; \quad \delta = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\Delta w) = \frac{\beta}{2\sqrt{z}}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\Delta z) - \frac{1}{2z}\Delta z + \frac{3}{4z^2}\delta z - \frac{1}{2z}\frac{\partial}{\partial x}(\delta z)\right]\Bigg|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\Delta w) = \frac{\beta}{2\sqrt{z}}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\Delta z) - \frac{1}{2z}\frac{\partial}{\partial x}(\Delta z) + \frac{3}{4z^2}\Delta z - \frac{1}{2z}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\delta z) + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{2z^2}\frac{\partial}{\partial x}(\delta z) - \frac{15}{8z^3}\delta z\right]\Bigg|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\Delta w) = \frac{\beta}{2\sqrt{z}}\left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\Delta z) - \frac{1}{2z}\delta(\Delta z) + \frac{3}{4z^2}\Delta z - \frac{1}{2z}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\delta z) + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{4z^2}\delta(\delta z) - \frac{15}{8z^3}\delta z\right]\Bigg|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}}$$

Pentru $z = 0$ se obține starea de tensiune din punctul de pe suprafața medie iar pentru $z = \pm h/2$ pentru punctele de la suprafața plăcii. În cazul plăcii dreptunghiulare ciocnite centric, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

6. Concluzii

Algoritmul de calcul pentru determinarea deformației maxime și stării de tensiune în punctul unde se produce ciocnirea este:

— se integrează ecuația diferențială a suprafeței medii (45) în exemplul dat), după care se stabilesc deformațiile statice $Z(x, y)$ și Z_M cu gradul de aproximație dorit;

— se calculează masa redusă a plăcii m_M cu relația (11);

— se calculează succesiv mărimile adimensionale μ_r și ε cu relațiile (10) și (16) iar apoi masa echivalentă m_e cu relația (17);

— se calculează raportul m_M/m cu care se stabilește funcție de coeficientul de restituire k pe baza diagramei din fig. 1 sau a inegalităților (19), (20), (23), (25)—(28) dacă în prima semiperioadă a vibrației plăcii se mai produce sau nu încă o ciocnire;

— se calculează mărimile adimensionale y_2 sau μ_1 cu relațiile (32) sau (44) apoi factorii dinamici β_2 sau β_1 cu relațiile (35) sau (43);

— se calculează deformația maximă cu relația (34) sau (42);

— se evaluează starea de tensiune în punctele dreptei $x = x_0$, $y = y_0$ cu relațiile (54) utilizînd (55) și operatorii (56);

Deformația maximă a suprafeței medii a plăcii nu se produce în general în dreptul punctului de aplicare a percuției. Evaluarea deformației și a stării de tensiune în punctul de maxim necesită un studiu suplimentar.

BIBLIOGRAFIE

1. *S. D. Ponomariov şi colab.*, Calculul de rezistenţă în construcţia de maşini, vol. III, Ed. tehnică 1964.
2. *S P. Timoshenko, S. Woinowski — Krieger,* Teoria plăcilor plane şi curbe, Ed. tehnică 1969
3. *A. I. Lurie,* Prostranstvenie zadarci teorii uprugosti, Iz. Nauka, Moshva 1955.

Aproximate Calculus Method of the Deformation and the Stresses in a Plate under the Action of a Transversal Impact

The study of an inelastic transversal impact of a plate has been made modelling the plate by an equivalent harmonic oscillator in the impact point. The domains of ratio between the reduced mass of the plate and the mass of the body which impacts function of the coefficient of restitution, for which it is possible to have one impact or two impacts in the first quarter of oscillation period, have been determined. The maximum deformations for both cases have been calculated. These are functions of statical deformation and of a dynamic factor. The reduced mass and the statical deformation expressions for an homogeneous rectangular plate clamped at all edges and direct central impacted, have been also determined. Finally, a calculus algorithm for the maximum deformations and the state of stress has been established.

C.Z. :661.96 :621.43

ASUPRA UNUI ECHIPAMENT PENTRU INTRODUCEREA HIDROGENULUI ÎN CILINDRUL MOTORULUI CU APRINDERE PRIN COMPRIMARE

Partea I

(Construcţie, funcţionare, calcul)

T. TURCOIU, D. NEDELCU*, N. APOSTOLESCU*

Lucrarea prezintă construcţia, principiul de funcţionare şi calculul unui echipament original pentru injecţia hidrogenului în cilindrul motorului cu aprindere prin comprimare.

1. Unele probleme privind utilizarea hidrogenului în motorul cu aprindere prin comprimare

Utilizarea hidrogenului drept combustibil în motorul cu aprindere prin comprimare atrage o seamă de dificultăţi, de natura introducerii lui în cilindru, de control al formării amestecului aer hidrogen, de aprindere şi ardere a acestuia, care menţin încă, în prezent, problema la nivelul căutărilor, al cercetărilor.

Din punctul de vedere al introducerii în cilindrul motorului există soluţii tehnice care permit aspiraţia hidrogenului în cilindru, în timpul cursei de admisie, şi soluţii care permit injecţia hidrogenului în cilindru, în timpul cursei de comprimare. Pentru injecţia în timpul cursei de comprimare s-au dezvoltat atît echipamente de injecţie la presiune joasă (2 . . 3 daN/cm^2), la începutul cursei de comprimare, cît şi echipamente de injecţie la presiune înaltă (50 . . 100 daN/cm^2), la sfîrşitul cursei de comprimare sau în timpul arderii.

Soluţiile tehnice prin care hidrogenul este aspirat în cilindru prezintă dezavantajul apariţiei aprinderilor necontrolate (preaprinderi) şi al fenomenului de propagare a flăcării spre traseul de admisie. Injecţia hidrogenului la presiune joasă elimină fenomenul de propagare a flăcării, iar injecţia la presiune înaltă şi pe cel al apariţiei aprinderilor necontrolate, întrucît în cilindrul motorului, pînă în momentul introducerii hidroge-

* Dr. ing., catedra Maşini termice şi cazane cu abur (Filiala INMT); Şef lucrări dr. ing.; Prof. dr. ing., catedra Maşini termice şi cazane cu abur.

nului, se află numai aer. Soluţia injecţiei la înaltă presiune permite şi ameliorarea arderii violente a amestecului aer-hidrogen, prin posibilitatea dozării în timp a hidrogenului. Dezavantajul injecţiei la înaltă presiune constă în dificultatea realizării injectoarelor de hidrogen şi a sistemului de comandă al acestora.

Din punctul de vedere al aprinderii şi arderii hidrogenului, soluţia de injecţie la înaltă presiune este avantajată dacă în cilindrul motorului se injectează un pilot de motorină, hidrogenul putînd fi injectat în avans faţă de injecţia pilotului de motorină, odată cu aceasta sau, cel mai eficient pentru atenuarea arderii violente a hidrogenului, după autoaprinderea pilotului de motorină. Un astfel de motor cu aprindere prin comprimare însă, funcţionează practic cu un amestec de hidrogen şi motorină, pentru fiecare combustibil fiind necesar un echipament de injecţie distinct. În acest caz injecţia motorinei se realizează cu un echipament clasic de injecţie, iar injecţia hidrogenului cu un echipament specific.

În acest sens, în lucrarea de faţă se prezintă construcţia, funcţionarea, calculul şi rezultatele experimentării unui echipament original pentru injecţia la înaltă presiune a hidrogenului în cilindrul motorului cu aprindere prin comprimare, a cărui componentă principală o constituie injectorul de hidrogen.

2. Injectorul de hidrogen. Construcţie şi funcţionare

În condiţiile în care motorul cu aprindere prin comprimare funcţionează cu un amestec de hidrogen şi motorină, componentele amestecului fiind introduse în cilindrul motorului pe căi diferite, cel mai des, spaţiul disponibil din chiulasă impune realizarea unui injector de hidrogen zvelt, cu ancombrament redus. În acest sens se recomandă utilizarea injectoarelor de motorină clasice sau a anumitor componente ale acestora, reproiectate în consecinţă. Utilizarea injectoarelor de motorină prezintă un anvantaj suplimentar : etanşarea la hidrogen, asigurată prin jocul foarte mic (1,5—3 μm) dintre acul şi corpul pulverizatorului. În schimb, la aceste injectoare, trebuie rezolvate problemele comenzii de ridicare a acului pulverizatorului şi de ungere a cuplului pulverizator-ac, în porţiunea în care jocul este de ordinul micronilor.

În cele ce urmează se prezintă soluţia originală de injector de hidrogen, concepută pe structura injectorului de serie KDL 94 S3R, produs la întreprinderea MEFIN-Sinaia.

La corpul 1 al injectorului (fig. 1) se asamblează suplimentar corpul hidraulic 4, care comportă pistonul hidraulic 5 realizat cu două porţiuni cilindrice de diametre diferite. Porţiunea cilindrică de diametru mic se prelungeşte cu o tijă ce se asamblează cu acul 3 al pulverizatorului 2. În acest scop tija se prelucrează, la partea de asamblare cu acul pulverizatorului, identic cu tija injectorului de motorină KDL 94 S3R.

În situaţia în care pulverizatorul se montează la corpul injectorului 1, cu ajutorul piuliţei speciale 7, acul 3 poate fi menţinut în poziţia închis, pe scaunul aferent prelucrat în corpul 2, prin intermediul tijei pistonului hidraulic 5, al arcului 16 şi al şurubului 17 de modificare a tensiunii elastice a arcului.

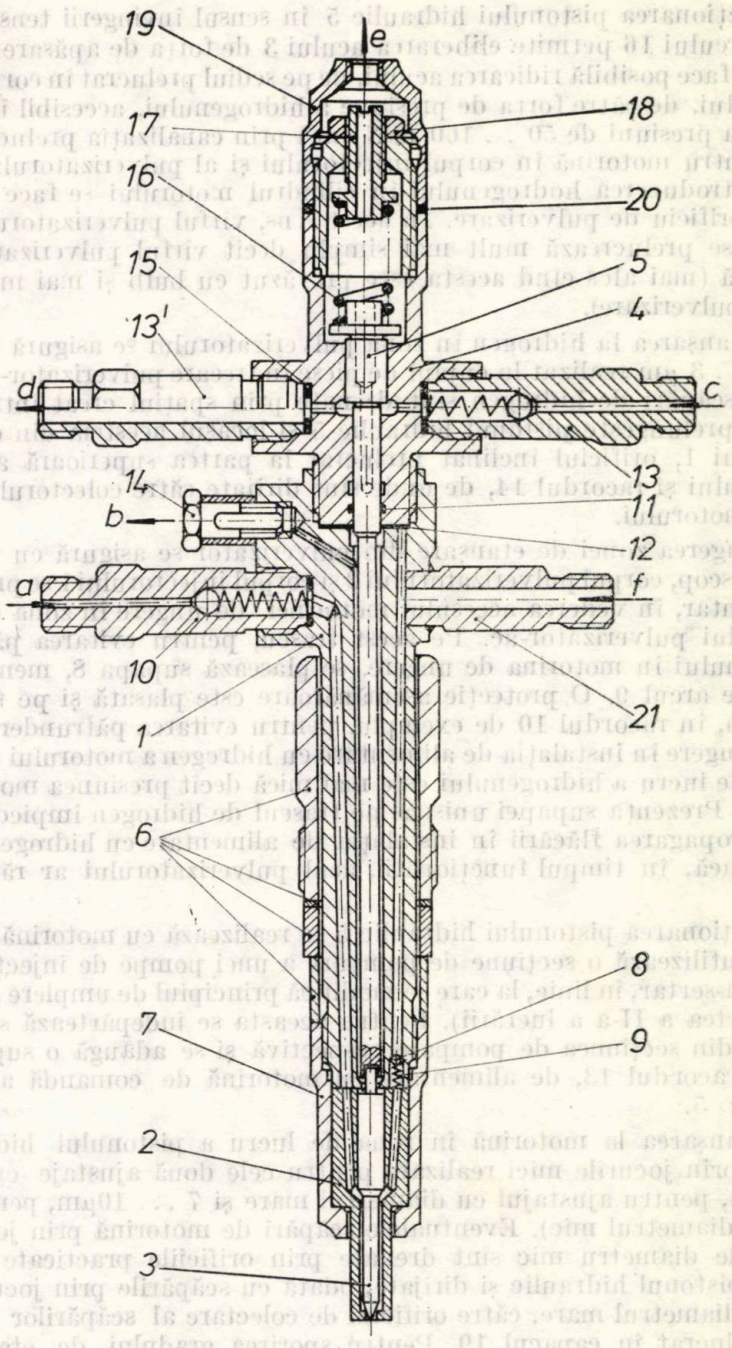


Fig. 1—Desenul de ansamblu al injectorului de hidrogen : 6-elemente de asamblare la chiulasă ; 12 ; 15 și 20—garnituri de etanșare ; 18—contrapiuliță ; a—intrare H_2 ; b—drenaj H_2 ; c—intrare motorină de comandă ; d—ieșire motorină de comandă ; e—drenaj motorină ; f—ungere.

Acționarea pistonului hidraulic 5 în sensul învingerii tensiunii elastice a arcului 16 permite eliberarea acului 3 de forța de apăsare a arcului. Aceasta face posibilă ridicarea acului, de pe sediul prelucrat în corpul pulverizatorului, de către forța de presiune a hidrogenului, accesibil în pulverizator (la presiuni de 50 . . 100 daN/cm²) prin canalizația prelucrată obișnuit pentru motorină în corpul injectorului și al pulverizatorului.

Introducerea hidrogenului în cilindrul motorului se face printr-un singur orificiu de pulverizare. În acest sens, vîrful pulverizatorului de hidrogen se prelucrează mult mai simplu decît vîrful pulverizatorului de motorină (mai ales cînd acesta este prevăzut cu bulb și mai multe orificii de pulverizare).

Etanșarea la hidrogen în zona pulverizatorului se asigură prin jocul de 1,5 . . 3 μm realizat la cuplul de piese în frecare pulverizator-ac. Eventualele scăpări de hidrogen sînt drenate prin spațiul creat între tija cu care se prelungește pistonul hidraulic 5 și locașul acesteia din corpul injectorului 1, orificiul înclinat prelucrat la partea superioară a corpului injectorului și racordul 14, de unde sînt dirijate către colectorul de admisie al motorului.

Ungerea zonei de etanșare din pulverizator se asigură cu motorină. În acest scop, corpul pulverizatorului 2 și corpul injectorului 1 se prelucrează suplimentar, în vederea accesului motorinei de ungere în zona de frecare a cuplului pulverizator-ac. Pe acest traseu, pentru evitarea pătrunderii hidrogenului în motorina de ungere, se plasează supapa 8, menținută pe scaun de arcul 9. O protecție asemănătoare este plasată și pe traseul de hidrogen, în racordul 10 de exemplu, pentru evitarea pătrunderii motorinei de ungere în instalația de alimentare cu hidrogen a motorului (cînd presiunea de lucru a hidrogenului este mai mică decît presiunea motorinei de ungere). Prezența supapei unisens pe traseul de hidrogen împiedică, totodată, propagarea flăcării în instalația de alimentare cu hidrogen a motorului, dacă, în timpul funcționării, acul pulverizatorului ar rămîne deschis.

Acționarea pistonului hidraulic 5 se realizează cu motorină. În acest scop se utilizează o secțiune de pompare a unei pompe de injecție clasice cu piston-sertar, în linie, la care se modifică principiul de umplere al pompei (vezi partea a II-a a lucrării). Pentru aceasta se îndepărtează supapa de refulare din secțiunea de pompare respectivă și se adaugă o supapă unisens în racordul 13, de alimentare cu motorină de comandă a corpului hidraulic 5.

Etanșarea la motorină în zona de lucru a pistonului hidraulic se asigură prin jocurile mici realizate pentru cele două ajustaje create (1,5 . . .3μm, pentru ajustajul cu diametrul mare și 7 . . . 10μm, pentru ajustajul cu diametrul mic). Eventualele scăpări de motorină prin jocul ajustajului de diametru mic sînt drenate prin orificiile practicate în acest scop în pistonul hidraulic și dirijate, odată cu scăpările prin jocul ajustajului de diametrul mare, către orificiul de colectare al scăpărilor de motorină, prelucrat în capacul 19. Pentru sporirea gradului de etanșare, în ajustajul cu diametru mic se prevede și inelul de etanșare 11.

Motorina necesară ungerii cuplului de frecare pulverizator-ac este preluată de la o altă secțiune de pompare a pompei de injecție utilizată

pentru comanda pistonului hidraulic și (sau) pentru injecția pilotului de motorină. Accesul motorinei de ungere în canalizația aferentă din injector este posibil prin racordul 21.

Funcționarea injectorului de hidrogen este următoarea : Cînd tensiunea arcului 16 este învinsă de forța de presiune a motorinei de comandă, ca urmare a procesului de refulare ce are loc la secțiunea de pompare a pompei de injecție utilizată pentru comandă, pistonul hidraulic 5 eliberează acul 3. În acest moment acul 3 este ridicat de pe sediul prelucrat în corpul pulverizatorului 2 de către forța de presiune a hidrogenului, prezent în permanență pe canalizația de hidrogen din corpul injectorului și al pulverizatorului la presiunea de lucru de 50 . . 100 daN/cm^2. Se produce astfel, injecția hidrogenului în cilindrul motorului.

Cînd forța de presiune a motorinei de comandă devine mai mică decît tensiunea arcului 16 (către sfîrșitul procesului de refulare de la secțiunea de pompare de comandă), acul 3 este aplicat pe scaunul său prin intermediul pistonului hidraulic 5 și al tijei cu care se prelungește aceasta. Are loc sfîrșitul procesului de injecție a hidrogenului. Durata procesului de injecție a hidrogenului este stabilită deci, de durata procesului de comandă a pistonului hidraulic. În acest sens, utilizarea elementelor de refulare ale pompelor de injecție pentru comanda pistonului hidraulic este avantajoasă, deoarece prin modificarea dozei de motorină refulată de elementul de comandă se asigură modificarea procesului de comandă a pistonului hidraulic și deci, a duratei de ridicare a acului pulverizatorului (durata procesului de injecție a hidrogenului).

3. Calculul injectorului de hidrogen

3.1. *Calculul traseului de hidrogen*

În varianta alimentării motorului cu aprindere prin comprimare cu un amestec de hidrogen și motorină, masa de hidrogen care se introduce în cilindrul motorului în timpul unui ciclu poate fi calculată cu relația (1) (tabelul 1).

Secțiunea de curgere a hidrogenului în cilindrul motorului se determină din relația debitului masic de hidrogen, $Q = \rho S w$ (relația 2, tabelul 1).

În ipoteza curgerii prin ajutaj (ipoteză susținută de faptul că secțiunea de curgere a hidrogenului este mult mai mică decît secțiunea cilindrului motorului (v. fig. 2)) viteza de curgere a hidrogenului în cilindrul motorului, w, și densitatea acestuia, ρ, se determină cu relațiile (6) și (7).

Diametrul orificiului de pulverizare se determină cu relația (3), relația rezultă din considerentul că, în varianta menținerii acului cu vîrf conic al pulverizatorului injectorului de serie KDL 94 S 3R, secțiunea de curgere oferită hidrogenului, la ridicarea acului de pe scaun, este constituită din suprafața laterală a unui trunchi de con (fig. 3).

Tabelul 1

Relații pentru calculul traseului de hidrogen

Parametrul	Relația de calcul	Relații auxiliare
Masa de hidrogen injectat pe ciclu	$m_H = m_M \frac{p}{2{,}863}$ [g/ciclu] (1)	$m_M = \frac{P_e c_e 1000}{i\, n_p 60}$ [g/ciclu] (4)
Secțiunea de curgere a hidrogenului în cilindrul motorului	$S = \frac{Q_H}{w_2 \rho_2}$ [m²] (2)	$Q_H = m_H / t_H = 6\, n m_H / \alpha_H$ [g/s] (5)
		$w_2 = \sqrt{2 \frac{k}{k-1} R_H T_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(k-1)/k}\right]}$ [m/s] (6)
		$\rho_2 = p_2 / (R_H T_2)$ [kg/m³] (7)
		$T_2 = T_1 (p_2/p_1)^{(k-1)/k}$ [K] (8)
Diametrul orificiului de pulverizare a hidrogenului	$d_0 = \frac{S + 0{,}5\pi s_a \sin\beta \sin(\beta/2)}{s_a \sin(\beta/2)}$ [m] (3)	s_a

Notații: m_M — masa de motorină injectată pe ciclu, în ipoteza funcționării motorului integral cu motorină; p — procentul de motorină înlocuită prin hidrogen; P_e — puterea efectivă a motorului, în kW; c_e — consumul specific efectiv de motorină, în g/kWh; i — numărul de cilindri ai motorului n_p — turația pompei de injecție, în rot/min; Q_H — debitul masic de hidrogen; t_H și α_H — durata de introducere a hidrogenului în cilindrul motorului, în s și °RAC; n — turația motorului, în rot/min; w_2 — viteza de curgere a hidrogenului în cilindrul motorului; k — exponentul adiabatic al hidrogenului, în J/kmol. K; T_1 și T_2 — temperatura hidrogenului în amontele și avalul secțiunii de curgere, în K; p_1 și p_2 — presiunea hidrogenului în amontele și avalul secțiunii de curgere, în N/m²; ρ_2 — densitatea hidrogenului în avalul secțiunii de curgere; s_a — înălțimea de ridicare a acului pulverizatorului de pe scaun (cursa acului), în m; β — unghiul conului acului pulverizatorului, în grd; 1/2,863 — raportul puterilor calorifice inferioare ale motorinei și hidrogenului.

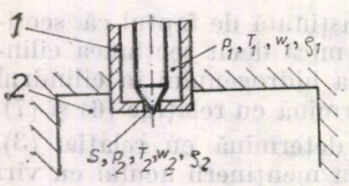


Fig. 2 — Schemă pentru calculul vitezei de curgere a hidrogenului în cilindrul motorului

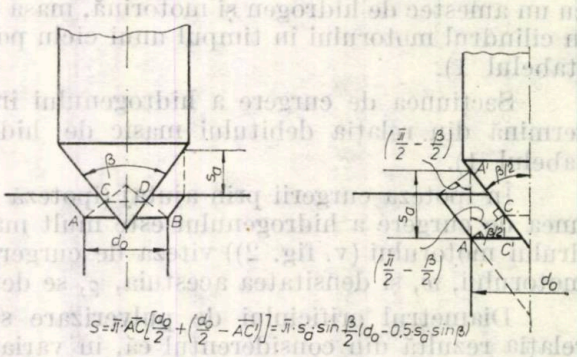


Fig. 3 — Schema de calcul a diametrului orificiului de pulverizare

3.2. *Calculul dispozitivului de comandă indirectă a acului pulverizatorului*

Dimensionarea pistonului hidraulic al dispozitivului care comandă indirect deschiderea acului pulverizatorului se face ținînd seama de următoarele elemente :

a) În varianta utilizării injectoarelor de serie, este preferabil ca mărimea diametrului d al pistonului hidraulic (fig. 4) să aibă aceeași valoare cu a diametrului acului pulverizatorului în zona de etanșare din corp, pentru a putea fi prelucrat pe aceleași mașini unelte pe care sînt prelucrate și pulverizatoarele, astfel încît să rezulte precizia dimensională, rugozitatea și abaterile de formă și poziție specifice acestora.

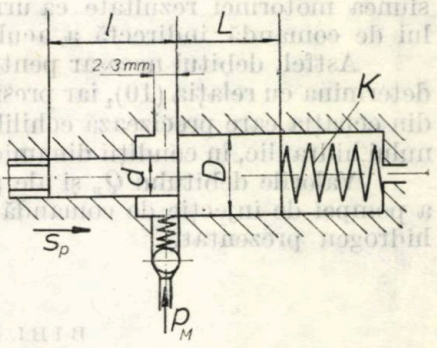


Fig. 4 — Schema de calcul a dispozitivului de comandă indirectă a acului pulverizatorului

b) Diametrul D al pistonului hidraulic se alege din condiția ca suprafața de lucru S_p (relația (9), tabelul 2) să fie mai mare decît suprafața de lucru a acului pulverizatorului, astfel încît pentru comanda pistonului să se utilizeze motorină la presiuni de refulare cu valori uzual întîlnite la pompele de injecție cu piston-sertar.

Lungimea porțiunilor cu diametrele D și d se determină dintr-o condiție de etanșare. În situația realizării ajustajelor cu jocuri de ordinul micronilor, această condiție solicită rapoarte cu valori precizate de (12) (tabelul 2).

Tabelul 2

Relații pentru calculul dispozitivului de comandă indirectă a acului pulverizatorului

Parametrul	Relația de calcul	Relații auxiliare
Suprafața de lucru a pistonului	$S_p = \frac{\pi(D^2-d^2)}{4}$ [m] (9)	$\frac{L}{D} \geqslant 2{,}5\ldots3{,}6$ [−] (12)
Debitul de fluid (motorină) de comandă	$Q_p = S_p v_p$ [m³/s] (10)	$v_p = \frac{s_p}{t_H/2} = \frac{12\,n s_p}{\alpha_H}$ [m/s] (13)
Presiunea fluidului (motorinei) de comandă	$p_M = \frac{M_p\left(\frac{d^2 s_p}{dt^2}\right) + K(s_p + s_{p0})}{S_p}$ [daN/cm²] (11)	$\frac{d^2 s_p}{dt^2} = \frac{8 s_p}{t_H^2}$ [m/s²] (14)

Notații : D și d — diametrele celor două porțiuni cilindrice ale pistonului hidraulic, în m ; L — lungimea porțiunii din pistonul hidraulic de diametru D, în m ; v_p — viteza medie de deplasare a pistonului hidraulic ; s_p — deplasarea pistonului hidraulic, în m ; M_p — masa pistonului hidraulic și jumătate din masa arcului, în daN·s²/m ; $d^2 s_p/dt^2$ — accelerația pistonului hidraulic ; K — constanta elastică a arcului, în daN/mm ; s_{p0} — săgeata inițială a arcului, în mm.

Debitul şi presiunea motorinei de comandă refulate de secţiunea de pompare a pompei de injecţie utilizate în acest scop, trebuie să prezinte valori care să permită activarea pistonului hidraulic al injectorului de hidrogen la orice regim de funcţionare a motorului. În acest sens, pompa de injecţie utilizată pentru comandă se alege în funcţie de debitul şi presiunea motorinei rezultate ca urmare a calculului hidraulic al dispozitivului de comandă indirectă a acului pulverizatorului.

Astfel, debitul necesar pentru ridicarea pistonului hidraulic se poate determina cu relaţia (10), iar presiunea motorinei de comandă se determină din ecuaţia care precizează echilibrul de forţe ce acţionează asupra pistonului hidraulic, în condiţii dinamice de lucru (v. relaţia (11)).

Valorile debitului Q_p şi ale presiunii p_M constituie criteriul de alegere a pompei de injecţie de comandă a pistonului hidraulic al injectorului de hidrogen prezentat.

BIBLIOGRAFIE

1. *H. S. Homan, a. a.*, Hydrogen-fueled diesel engine without timed ignition, Int. J. Hydrogen Energy, Vol. 4, 1979.
2. *G. Gopal, a. a.*, Use of hydrogen in dual-fuel engines, Int. J. Hydrogen Energy Vol. 7, no. 3, 1982.
3. *T. Turcoiu, ş. a.*, Echipamente de injecţie pentru motoarele cu ardere internă, Bucureşti Ed. Tehnică, 1987.
4. *A. Manea, ş. a.*, A new injection process that eliminates the voids in the high pressure pipe, Rev. Rom. Sci. Tech. Energ. Elth., 21, 3—1976.

Concerning a Hydrogen Injection Equipment in the Diesel Engine Cylinder

The paper presented the construction, working, and calculus for an original hydrogen injection equipment in the diesel engine cylinder.

C.Z.: 621.43:628.33

ASUPRA ECUAȚIEI DE CONTINUITATE LA CURGEREA AMESTECURILOR POLIFAZICE CU APLICAȚIE LA CURGERI PRIN INSTALAȚII DE EPURARE A APELOR

D. ROBESCU, T. PETROVICI*

Teoria sistemelor polifazice s a dezvoltat în legătură cu aplicațiile din industrie și geofizică.

În acest articol se scriu ecuațiile de continuitate pentru curgeri polifazice turbulente (prin metoda lui Lagrange și Euler) în ipoteza multicomponenței și a fluidului echivalent.

Pentru cazul concret al curgerii polifazice prin instalații de epurare a apelor se fac considerații asupra termenilor care cuprind schimbul interfazic.

1. Noțiuni generale

În procesul tehnologic al tratării și epurării apelor, fluidele vehiculate prin instalații sînt în general amestecuri polifazice cu reacții între constituenți.

În funcție de natura și proprietățile fizice, chimice sau biochimice ale fazelor dispersate, transportate de faza fluidă purtătoare (definită în sensul fluidului omogen), interacțiunile dintre constituenții amestecului se manifestă prin transfer de masă, moment liniar și energie internă. Aceste schimburi pot fi, de asemenea, de natură chimică, biochimică sau biologică (ecosisteme).

În ipoteza că amestecul plolifazic este un mediu continuu, teoremele și legile generale ale cinematicii și dinamicii fluidelor omogene pot fi extrapolate și la fluide polifazice în forme specifice. Trebuie remarcat că în studiul curgerii amestecurilor polifazice s-au impus în general două moduri de abordare cunoscute sub numele de ipoteza multicomponenței și respectiv ipoteza fluidului echivalent [1]. În ipoteza multicomponenței ecuațiile de mișcare se scriu separat pentru fiecare fază constituentă a amestecului, ținînd seama că fazele sînt componente ale aceluiași mediu continuu și că în cursul mișcării apar schimburi de masă, moment liniar și energie internă între ele la interfață. În ipoteza fluidului echivalent se presupune existența unui fluid fictiv cu proprietăți (densitate, viteză, viteză de difuzie, viscozitate, presiune etc.) obținute în ipoteza amestecului continuu [2].

* Șef lucrări dr. ing.; Cercet. șt. pr., catedra Hidraulică și mașini hidraulice

2. Noțiuni de cinematica pentru curgerea amestecurilor polifazice

2.1. *Generalități*

Cinematica fluidelor polifazice se bazează pe ipoteza continuității și de mediu continuu în fiecare fază sau a fluidului echivalent, caracterizată de parametrii hidraulici funcții continue și derivabile de coordonatele punctului și de timp. În ipoteza multicomponenței ca metodă de studiu se admite că masa fiecărei faze este compusă dintr-un număr foarte mare de particule.

În ipoteza fluidului echivalent, definit pentru un amestec polifazic format din N constituenți, se admite că fracțiile de volum ale fazelor disperse sînt mici ($C_i \ll 1$, $i = 1, N$, $i \neq f$ unde f este indicele fazei purtătoare, iar C_i este concentrația), dispersia acestora este uniformă și izotropă, astfel încît masa fluidului echivalent în mișcare este formată dintr-un număr foarte mare de particule, echivalente din punct de vedere al constituenților și distribuției acestora și caracterizate de un centru masic.

În ambele ipoteze, particula fluidă se consideră a fi acea parte din fluid sau fază constituentă ale cărei dimensiuni sînt astfel încît caracteristicile medii ale mișcării satisfac condiții de netezime (funcțiile care se definesc și derivatele lor pînă la un anumit ordin sînt continue), [3].

În acest caz studiul mișcării unei particule se poate face ca pentru mișcarea unui punct material din mecanica generală.

Astfel, în ipoteza multicomponenței pentru definirea traiectoriilor, vitezelor și acceleraților particulelor din faza de indice i a amestecului prin metoda Lagrange se consideră punctele din spațiu $M_{i1}(x_{i01}, y_{i01}, z_{i01})$, $M_{i2}(x_{i02}, y_{i02}, z_{i02})$, . . , în care la timpul t_0 se află particule din faza i (într-o vecinătate de dimensiuni echivalente cu ale particulei, concentrația volumică instantanee a celorlalte faze este neglijabilă sau zero) (fig. 1).

În descrierea mișcării fazelor constituente ale amestecului prin metoda Euler se consideră punctele din spațiu $M_{i1}(x_{i1}, y_{i1}, z_{i1})$, M_{i2} (x_{i2}, y_{i2}, z_{i2}), . . ., prin care trec la timpii t_1, t_2, . . ., particule fluide din faza i (la timpii t_1, t_2, . . ., concentrațiile volumice ale celorlalte faze sînt nule sau neglijabile într-o vecinătate de dimensiuni geometrice echivalente cu ale particulei) (fig. 2). În ambele metode simbolurile care dau gradienții mărimilor, exprimă faptul că derivările urmăresc mișcarea într-o fază particulară i. Spre exemplu pentru cîmpul acceleraților din faza i, $\vec{a}_i = \dot{\vec{v}}_i = \partial \vec{v}_i / \partial t + (\vec{v}_i \nabla)\vec{v}_i$ simbolul $\bullet$ exprimă faptul că derivata temporală materială urmărește mișcarea într-o fază particulară.

În ipoteza fluidului echivalent traiectoriile se definesc ca la fluidul omogen. Viteza amestecului polifazic se definește sub forma vitezei baricentrice $\vec{v}_n = \left(\sum_1^N \rho_i^* \vec{v}_i \right) / \rho_n$ (N este numărul fazelor amestecului, ρ_i^* densitatea aparentă a amestecului, ρ_i^* densitatea relativă a fazei i).

Cîmpul acceleraților este dat de $\dot{\vec{v}}_n = \vec{a}_n = \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}_n \nabla)\vec{v}_n$, unde simbolul $\bullet$ exprimă faptul că derivata temporală materială urmărește mișcarea baricentrică a fluidului echivalent.

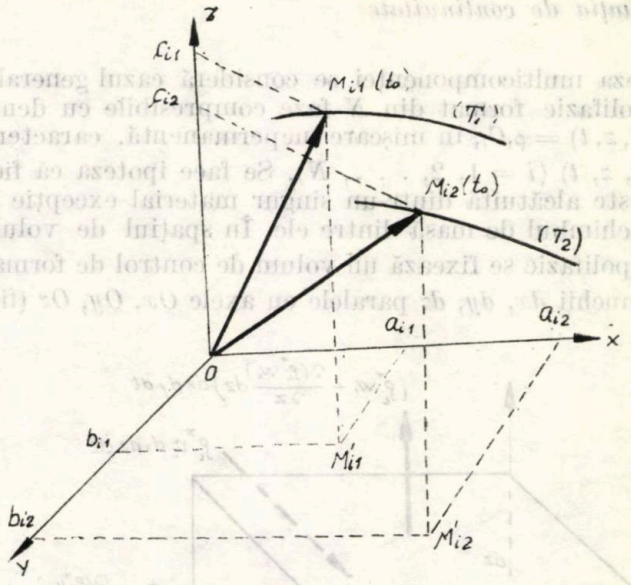


Fig. 1 — Descrierea mișcării fazei *i* a unui amestec polifazic prin metoda Lagrange

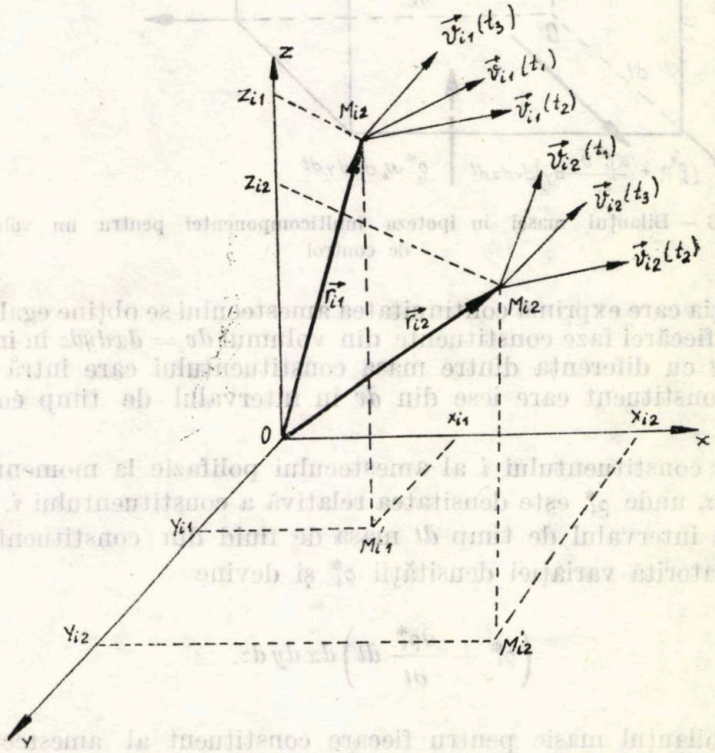


Fig. 2 — Descrierea mișcării fazei *i* a unui amestec polifazic prin metoda Euler

2.2. *Ecuația de continuitate*

În ipoteza multicomponenței se consideră cazul general al curgerii unui fluid polifazic format din N faze compresibile cu densitățile ponderate $\rho_i^*(x, y, z, t) = \rho_i C_i$, în mișcare nepermanentă, caracterizate de vitezele $\vec{v}_i(x, y, z, t)$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$. Se face ipoteza că fiecare fază a amestecului este alcătuită dintr-un singur material excepție făcînd interacțiunile și schimbul de masă dintre ele. În spațiul de volum V ocupat de amestecul polifazic se fixează un volum de control de forma unui paralelipiped de muchii dx, dy, dz paralele cu axele Ox, Oy, Oz (fig. 3).

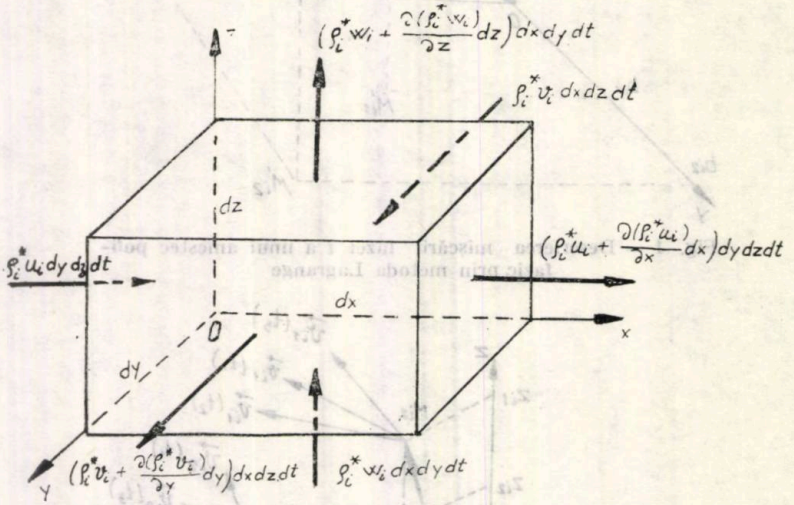


Fig. 3 — Bilanțul masei în ipoteza multicomponenței pentru un volum de control

Relația care exprimă continuitatea amestecului se obține egalînd variația masei fiecărei faze constituente din volumul $dv = dxdydz$ în intervalul de timp dt cu diferența dintre masa constituentului care intră și masa aceluiași constituent care iese din dv în intervalul de timp considerat (fig. 3).

Masa constituentului i al amestecului polifazic la momentul t este $\rho_i^*\, dx\, dy\, dz$, unde ρ_i^* este densitatea relativă a constituentului i.

După intervalul de timp dt masa de fluid din constituentul i se modifică datorită variației densității ρ_i^* și devine

$$\left(\rho_i^* + \frac{\partial \rho_i^*}{\partial t}\, dt\right) dx\, dy\, dz.$$

Din bilanțul masic pentru fiecare constituent al amestecului rezultă ecuația continuității fazei compresibile în mișcare nepermanentă,

$i = 1, N$, a fluidului polifazat sub forma

$$\frac{\partial \rho_i^*}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_i^* u_i)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_i^* v_i)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_i^* w_i)}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

sau

$$\frac{\partial \rho_i^*}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i^* \vec{v}_i) = 0 \tag{2}$$

Ecuația de continuitate (2) este valabilă pentru amestecuri polifazice cu faze inerte (ce nu reacționează chimic sau biochimic).

În ipoteza schimbului de masă h_i dintre constituentul i al amestecului și celelalte faze (sau o parte din ele), ca rezultat al amestecării, ionizării, reacțiilor chimice, biochimice sau biologice etc., rezultă forma cea mai generală a ecuației continuității în ipoteza multicomponenței

$$\frac{\partial \rho_i^*}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i^* \vec{v}_i) = h_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N \tag{3}$$

Dacă C_i este concentrația volumică iar ρ_i densitatea materială a fazei i, ecuația continuității are expresia

$$\frac{\partial(\rho_i C_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i C_i \vec{v}_i) = h_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{4}$$

Pentru oricare altă fază de indice j ($j = 1, 2, \ldots, N$, $j \neq i$) ecuația (4) se scrie sub forma

$$\frac{\partial\left[\rho_j\left(1 - C_j + \sum_1^N C_n\right)\right]}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\rho_j\left(1 - C_j + \sum_1^N C_n\right)\vec{v}_j\right] = h_j. \tag{5}$$

În concentrații masice C_{Mi} rezultă o altă formă a ecuației continuității

$$\frac{\partial(\rho_n C_{Mi})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_n C_{Mi} \vec{v}_i) = h_i, \quad i = 1,2, \ldots, N \tag{6}$$

unde dacă constituentul i este de tip biochimic, $h_i = -\nabla I_i + \rho_i \tau_i$ (I_i este fluxul difuziv masic al constituentului i, iar τ_i reprezintă termenul de producție sau biodegradare al aceluiași constituent).

În ipoteza fluidului echivalent ecuația de continuitate a amestecului polifazic se obține prin însumarea ecuațiilor de continuitate pen-

tru toate fazele amestecului (4) sub forma

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_n \vec{v}_n) = 0 \tag{7}$$

unde $\rho_n = \sum_{i=1}^{N} \rho_i^*$ este denistatea echivalentă a amestecului, iar $\rho_n \vec{v}_n = \sum_{i=1}^{N} \rho_i^* \vec{v}_i$ ($\vec{v}_n$ este viteza baricentrică). În obținerea ecuației continuității (7), $\sum_{i=1}^{N} h_i = 0$ dacă toate cele N faze ale amestecului participă la schimbul de masă sau $\sum_{i=1}^{L} h_i = 0$, dacă numai L faze ($L < N$) participă la schimb, restul fiind faze inerte.

2.2.1. *Aplicație la curgerea amestecurilor polifazice prin instalații de epurare a apelor*

Prin instalațiile de epurare a apelor sînt vehiculate fluide polifazice (amestecuri) în condițiile existenței unui mediu biochimic întreținut de sistemul de masă vivantă — biomasa.

În general modelarea unui mediu biochimic este dificilă datorită numărului mare de constituenți : alge, bacterii, zooplancton etc., oxigen sub formă de bule gazoase, substanțe minerale sau organice dizolvate sau în stare de suspensie etc. De asemenea, dinamica cu totul specifică, a legăturilor dintre constituenți și modul de variație în timp și spațiu a concentrației biomasei, precum și evoluția biomasei și a substratului asimilat sau neasimilat de biomasă influențează modelarea fenomenelor de curgere. Procesele de bază care caracterizează evoluția unui amestec biochimic sînt producția primară și biodegradabilitatea. Sistemul de masă vivantă (biomasa) din instalațiile de epurare a apelor uzate este caracterizat în general de trei componente esențiale : a) substratul material larg (masa) ; b) energia (inclusă în masă și liberă) ; c) cantitatea de informație pasivă și activă (pentru nivelul de organizare al constituenților de acest tip, legată în special de metabolism). Prima componentă validează abordarea mediului biochimic prin metodele fizice obișnuite.

În ipoteza multicomponenței considerînd mediul polifazic biochimic format din N constituenți cu concentrațiile masice C_{Mi}, $i = \overline{1, N}$, ecuațiile de continuitate ale mișcării amestecului se scriu sub forma (6).

În ipoteza că fiecare constituent al amestecului este un sistem deschis, în ecuațiile de continuitate (6), termenii h_i reprezintă efectul interac-

țiunilor de substrat material (intrări-ieșiri) dintre faze în zonele interfaciale și sînt definiți de legi constitutive de tipul

$$h_i = h_i(G_a, H_{ij}, \vec{\vec{T}}_i, \vec{\vec{T}}_j, \vec{\vec{D}}_i, \vec{\vec{D}}_j, C_{Mi}, C_{Mj}, \nabla C_{Mi}, \nabla C_{Mj}$$

$$(P_f)_i, (P_f)_j, (P_b)_i, (P_b)_j, (P_l)_i, (P_l)_j, I_{ij}), \quad \begin{matrix} i = 1,2,\ldots, N \\ j = 1,2,\ldots, N,\ j \neq i \end{matrix} \tag{8}$$

unde G_a este gradul de amestecare (pentru sistemele de aerare cu convecție forțată a oxigenului definit în sensul lui Camp), H_{ij} cuprinde parametrii hidrodinamici ai mișcării (adîncimea apei din instalații, intensitatea turbulenței, cîmpul vitezelor în fiecare fază, viteza relativă $\vec{V}_i - \vec{V}_j$ etc.), $\vec{\vec{T}}_i$ și $\vec{\vec{T}}_j$ sînt tensorii tensiunilor, $\vec{\vec{D}}_i$ și $\vec{\vec{D}}_j$ tensorii vitezelor de deformație (ei intervin în special datorită efectului provocat de ciocnirile dintre particulele fazelor la concentrații mari), C_{Mi}, C_{Mj}, ∇C_{Mi}, ∇C_{Mj}, sînt concentrațiile masice ale constituenților și gradienții lor, $(P_f)_i$ și $(P_f)_j$ sînt parametrii fizici (temperatura, factorii fizici exteriori, reaerarea etc.), $(P_b)_i$ și $(P_b)_j$ parametrii biochimici (productivitatea, biodegradarea etc.), $(P_l)_i$ și $(P_l)_j$, sînt parametrii limitatori ai interacțiunilor, iar I_{ij} gradul de ionizare relativă al particulelor fazelor.

Complexitatea legii (8) impune ca în funcție de specificitatea fenomenului studiat să se adopte legi mai simple. Astfel, termenii care exprimă interacțiunile dintre fazele inerte din punct de vedere biochimic iau în considerare numai amestecarea, ionizarea și condițiile hidrodinamice (termenii sînt proporționali cu viteza relativă $\vec{V}_i - \vec{V}_j$). Dacă interacțiunile sînt de tip transfer de proprietate (reaerare, biodegradare, aport sau consum de proprietate) se definește pentru fiecare parametru din legea (8) o viteză de reacție $\frac{dC_{Mi}}{dt} = KC_M$ unde K este coeficient de trnasfer, determinat în general experimental. Pentru schimbul biochimic se definesc și legile de bilanț pentru vitezele de reacție biochimică ale biomasei substratului asimilat și substratului neasimilat [4].

BIBLIOGRAFIE

1. *J. Florea, D. Robescu*, „Hidrodinamica instalațiilor de transport hidropneumatic și de depoluare a apei și aerului", E. D. P., 1985.
2. *J. W. Nenziato*, „Theory of dispersed multiphase flow", Academic Press, 1983.
3. *N. Săvulescu, A. Georgescu, M. Dumitrescu, M. Bucur*, „Cercetări matematice în teoria modernă a stratului limită", Ed. Acad., 1981.
4. *H. Roques*, „Fondements théoriques du traitement biologique des eaux", Paris, 1980.

The Continuity Equation for Multiphase Turbulent Flow

Multiphase mixtures systems are of great interest in many industrial and geophysical processes.

This paper discusses the equations of continuity for multiphase turbulent flow (written in Lagrangean and Eulerian methods) in assumption multicomponent and equivalent flow processes.

For the concret case of the multiphase flow by installations of waste water treatment plant are considered the role and influence of the physical, chemical, and biological factors of interphasic surface.

C.Z. :66.023
539.375

ASPECTE PRIVIND DURATA DE VIAȚĂ A UNUI RECIPIENT SUB PRESIUNE, CU ABATERI DE LA FORMA GEOMETRICĂ

MIHAELA PĂUNESCU, R. I. IATAN, C. D. TACĂ*

Lucrarea analizează comparativ, prin trei metode de calcul, durata de viață a unui recipient sub presiune, realizat din virole cu aceeași grosime, coaxiale, cu excentricități între suprafețele mediane.

Rezultatele obținute permit proiectanților și utilizatorilor de astfel de utilaje să hotărască justificat, în funcția de exigențele domeniului de folosire, asupra duratei de viață a acestora.

Pe lîngă condițiile privind alegerea corectă a materialului de construcție, a soluțiilor constructive și a tehnologiei de fabricare, evitarea abaterilor geometrice de la forma corectă în realizarea recipientelor sub presiune, joacă un rol deosebit de important.

Corpul cilindric, elementul de bază în construcția recipientelor, se obține prin sudarea între ele a mai multor virole. Această operație, în cele mai multe cazuri înregistrează abateri de la rectiliniaritatea generatoarei (fig. 1). Ca o consecință a acestei imperfecțiuni de realizare a corpului cilindric, apar în zona îmbinării momente încovoietoare meridionale care duc la coeficienți de concentrare a tensiunilor cu valori importante.

În două lucrări anterioare ale autorilor [1, 2], a fost analizat cazul a două virole cilindrice cu suprafețe mediane decalate cu o excentricitate „e", solicitate de o presiune interioară constantă. În lucrarea de față, se studiază durabilitatea aceleiași îmbinări sudate, în cazul solicitării la presiune interioară pulsatoare sau, altfel spus, se studiază îmbinarea la oboseală oligociclică (oboseală la mai puțin de 10^5 cicluri de sarcină). Fenomenul este condiționat de deformațiile plastice care apar în timpul funcționării recipientelor. Aceasta înseamnă că local, în peretele recipientelor sub presiune, tensiunile σ^* (tensiune aparentă) depășesc limita de curgere, $\sigma^* > \sigma_c$, dar $\sigma^* < 2\sigma_c$ [3] (fig. 2). În figura 2 : $\overline{OA'} = \sigma_c$, $\overline{OB'} = \sigma^* = \alpha \cdot \sigma_{max}$ (α = coeficientul de concentrare al tensiunilor în domeniul elastic), $\overline{OC'} = \alpha_\sigma \cdot \sigma_{max}$, tensiunea reală, α_σ = coeficientul de concentrare al tensiunilor în domeniul plastic de solicitare, $\overline{OF} = \alpha_\varepsilon \cdot \varepsilon_{max}$ — deformația totală reală și α_ε — coeficientul de concentrare a deformațiilor.

* Șef lucr. ing.; Șef lucr. dr. ing.; Asist. ing., catedra Utilaj tehnologic chimic

Legătura dintre amplitudinea deformației totale, $\Delta\varepsilon_t$, a deformației plastice, $\Delta\varepsilon_p$, a deformației elastice, $\Delta\varepsilon_e$, și numărul de cicluri pînă la rupere (N_r), este reprezentată în figura 3 [4]. Ca relație de calcul pentru determinarea lui N_r se alege relația Manson-Coffin [5]:

$$\Delta\varepsilon_t = \frac{3{,}5 \cdot \sigma_r^T}{E^T \cdot N_r^{0{,}12}} + \left(\frac{\ln \dfrac{100}{100 - \psi_r}}{N_r}\right)^{0{,}6}, \quad (1)$$

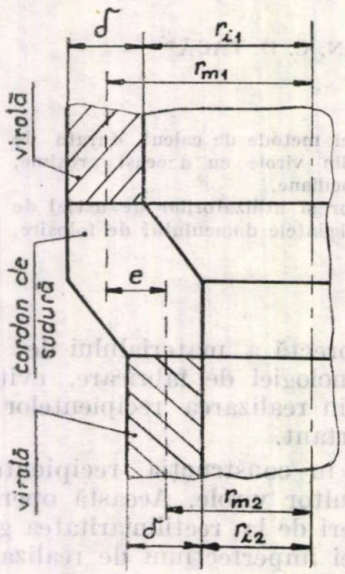


Fig. 1

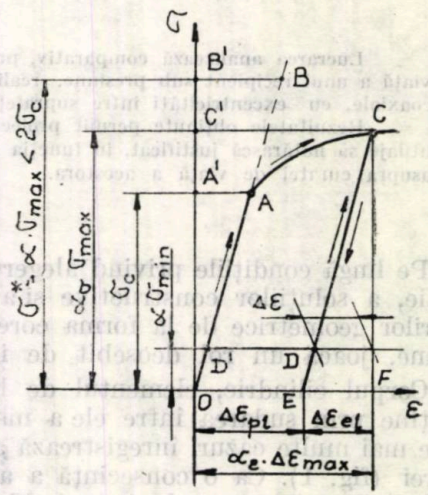


Fig. 2

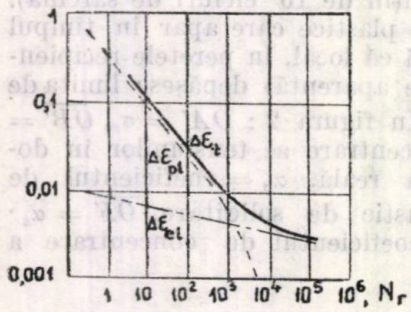


Fig. 3

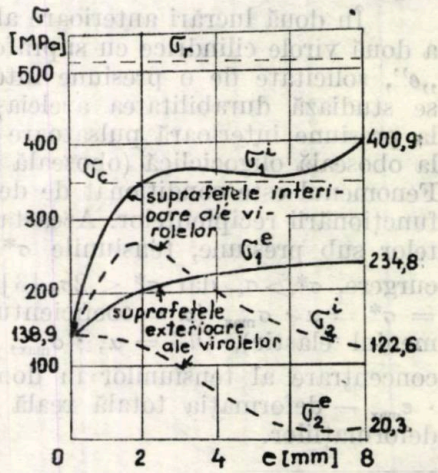


Fig. 4

în care : $\Delta\varepsilon_t$ — amplitudinea deformației totale care apare în zona îmbinării, [%]; σ_r^T — rezistența la rupere a materialului la temperatura de lucru, [MN/m²]; E^T — modulul de elasticitate a materialului, la temperatura de calcul, [MN/m²]; ψ_r — gîtuirea la rupere, [%].

Pentru aplicarea relației (1) e necesar să se determine amplitudinea deformației totale, $\Delta\varepsilon_t$, cunoscînd tensiunile care se dezvoltă în cazul studiat (Fig. 4). Tensiunile maxime apar la suprafețele interioare ale virolelor, în zona de trecere de la cordonul de sudură la materialul de bază. Calculul amplitudinii deformației totale se poate face în mai multe moduri. Astfel :

Cazul I

Pentru cele patru situații $e = 2, 4, 6$ și 8 mm, $\sigma_{max} > \sigma_c$ (dar $\sigma_{max} < 2\alpha_c$), se determină coeficientul de concentrare al tensiunilor în domeniul elastic [6]

$$\alpha = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{membrană}}, \tag{2}$$

și coeficientul de concentrare a tensiunilor $\alpha_k(\sigma)$ în domeniul plastic de solicitare :

$$\alpha_k(\sigma) = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_c}. \tag{3}$$

Aplicînd relația Neuber

$$\alpha_k^2 = \alpha_k(\sigma) \cdot \alpha_k(\varepsilon), \tag{4}$$

se determină coeficientul de concentrare a deformațiilor în domeniul plastic :

$$\alpha_k(\varepsilon) = \frac{\alpha_k^2}{\alpha_k(\sigma)}. \tag{5}$$

Cunoscînd pe $\alpha_k(\varepsilon)$ se poate calcula amplitudinea deformației plastice apărută în fiecare caz în parte :

$$\Delta\varepsilon_{pl} = \Delta\varepsilon_c[\alpha_k(\varepsilon) - 1], \tag{6}$$

relație în care

$$\Delta\varepsilon_c = \frac{\Delta\sigma_c}{E}. \tag{7}$$

Amplitudinea deformației totale se determină cu relația

$$\Delta\varepsilon_t = \Delta\varepsilon_{pl} + \Delta\varepsilon_{el}. \tag{8}$$

$\Delta\varepsilon_t$ astfel determinat se introduce în relaţia Manson-Coffin (1), rezultînd valoarea N_r.

Ecuaţia (1) se rezolvă în felul următor: se notează $N_r^{0,12} = x$, ceea ce înseamnă că $N_r^{0,6} = x^5$; se obţine astfel o ecuaţie de gradul 5. Rezultatele obţinute în cazurile $e = 2,4,6$ şi 8 mm sînt prezentate în figura 5.

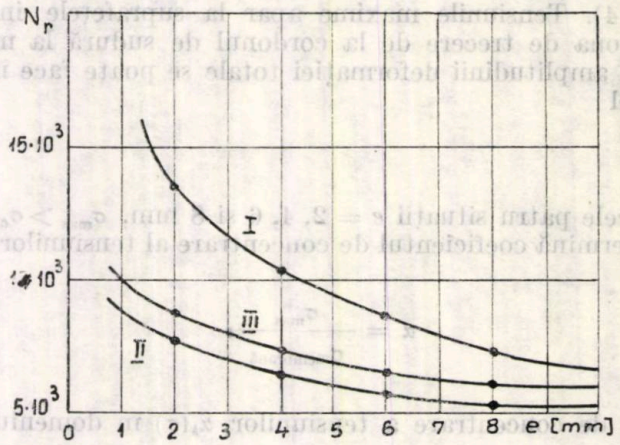


Fig. 5

Cazul II

În această situaţie se consideră $\Delta\varepsilon_t = \Delta\varepsilon_{ech}$ [7], unde

$$\Delta\varepsilon_{ech} = \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{[(\Delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)]^2 + [\Delta(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)]^2 + [\Delta(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)]^2}. \quad (9)$$

Intervalele de variaţie ale deformaţiilor specifice liniare se calculează astfel:

$$\Delta(\varepsilon_i - \varepsilon_j) = (\varepsilon_i - \varepsilon_j)_{max} - (\varepsilon_i - \varepsilon_j)_{min}; \quad (10)$$

$$i,\ j = 1, 2, 3;\ i \neq j.$$

În cazul de faţă s-a considerat $(\varepsilon_i - \varepsilon_j)_{min} = 0$.

Urmărind în continuare, metodologia de calcul de la punctul precedent, pentru diferitele valori ale excentricităţilor, rezultatele obţinute sînt înscrise în figura 5.

Cazul III

Un calcul rapid al numărului de cicluri pînă la rupere, Nr, se poate face în acest caz cunoscînd valorile coeficienţilor de concentrare a tensiunilor, α, în domeniul elastic, pentru îmbinarea virolelor cu diferite excentricităţi. Lucrarea [8] prezintă astfel de date, iar rezultatele calculului sînt prezentate, de asemenea, în figura 5.

Concluzii

În urma calculelor efectuate se constată următoarele:

a) durabilitatea îmbinării (numărul de cicluri pînă la rupere N_r) scade la jumătate cînd excentricitatea virolelor crește de la $e = 2$ mm la $e = 8$ mm;

b) diferențele dintre rezultatele obținute, aplicînd cele trei moduri de calcul sînt mari în domeniul excentricităților mici și scad mult în domeniul excentricităților mari;

c) curbele permit determinarea directă a valorilor lui Nr pentru excentricități cuprinse între 2—8 mm.

Avînd în vedere cele expuse anterior, se constată că în cazul II valorile lui Nr sînt cele mai reduse, situînd calculul pe partea sigură. În funcție de condițiile reale de lucru ale recipientului cu abateri dela forma geometrică, proiectantul și utilizatorul trebuie să discearnă asupra duratei de viață a utilajului.

BIBLIOGRAFIE

1. *R. I. Iatan, M. Păunescu, C. D. Tacă*, Asupra concentrării de tensiuni în zona de îmbinare prin sudare a două virole cilindrice coaxiale de diametre diferite, Construcția de mașini, nr. 4, 1985, p. 222—226.
2. *R. I. Iatan, M. Păunescu, C. D. Tacă*, Asupra concentrării de tensiuni în zona de îmbinare a două virole cilindrice cu abateri de formă, Buletin I..P.B., seria mecanică (sub tipar).
3. *J. Harvey*, Theory and design of modern pressure vessels, Van Nostrand—Reinhold, New York, 1974.
4. *D. Cioclov*, Rezistență și fiabilitate la solicitări variabile, Ed. Facla, Timișoara, 1975.
5. *S. Manson*, Thermal stress and low-cycle fatigue, Mc-Graw, Hill, New York, 1974.
6. *V. V. Jinescu*, Utilaj tehnologic pentru industrii de proces, vol. II. Ed. Tehnică, 1984, București.
7. *M. Renert*, Oboseala oligociclică a recipientelor sub presiune, Buletinul ISCIR, nr. 1, 1983.
8. *V. Larionov*, Him. neft. mașinostr., nr. 2, 1977, p. 12—13.

Aspect Concerning the Life Limit of a Pressure Vessel with Dimensional Discrepancy

The paper analyses, by three methods, the life limit of a pressure vessel made by coaxial rings having the same thickenss but with eccentricity between their median surface.

The results obtained in the paper permitted to the mechanical engineers engaged in the design of technological equipment to justify, according to the requirements of the respective field, about the life limit of these pressure vessels.

Aspect Concerning the Life Limit of a Pressure Vessel with Dimensional Discrepancy

The paper analyses, by three methods, the life limit of a pressure vessel made by coaxial rings having the same thickness but with eccentricity between their median surface.

The results obtained in the paper permitted to the mechanical engineers engaged in the design of technological equipment to justify according to the requirements of the respective field, about the life limit of these pressure vessels.

C.Z.: 622.74

CERCETĂRI TEORETICE ȘI EXPERIMENTALE PRIVIND DINAMICA SITELOR CU MIȘCARE DE RULIU

GH. I. ENE, R. I. IATAN*

Lucrarea prezintă, pentru un ciur de construcție originală, cu mișcare de ruliu, relațiile pe baza cărora se pot stabili distribuțiile traiectoriilor, vitezelor și accelerațiilor punctelor de pe suprafața sitei sau ale cadrului acestuia. Se stabilesc, totodată, zonele în care cernerea se realizează prin lunecarea materialului poligranular sau prin aruncarea acestuia pe sită. Rezultatele teoretice sînt confruntate cu cele experimentale, rezultînd o bună concordanță. Lucrarea oferă în același timp și noi direcții de cercetare teoretică și experimentală ce pot fi aprofundate ulterior.

Cernerea materialelor poligranulare este o operație tehnologică utilizată din cele mai vechi timpuri. Deși aparent simplă, cernerea depinde de foarte mulți factori a căror influență nu a putut fi prinsă pe deplin în calculele care se fac în momentul de față. Este justificată în acest caz apariția unor lucrări științifice care caută să pătrundă tot mai mult în intimitatea procesului, în sensul optimizării acestuia din punctul de vedere al eficienței și al consumului energetic minim.

Dintre ciururile care s-au impus în uzul industrial în ultima vreme, datorită avantajelor pe care le prezintă, se menționează cele cu mișcare de ruliu. Dinamica diferitelor tipuri de ciururi cu mișcare de ruliu a făcut obiectul mai multor lucrări autohtone, avînd în vedere un utilaj de construcție originală [1—6] și străine [8—15].

Ciururile cu mișcare de ruliu sînt apreciate în domeniul cernerii uscate (de exemplu în industria ceramicii și a materialelor refractare cu umiditate sub 3—4%, cu granulație fină și foarte fină — pînă la 0,1 mm [16], al cernerii umede și al deshidratării nămolurilor. Practic aceste ciururi se utilizează aproape în orice domeniu : industria chimică (materiale plastice, coloranți etc.), industria farmaceutică, industria materialelor de construcții (ciment, ceramică, materiale refractare etc.), industria minieră (prepararea minereurilor), industria alimentară (prepararea conservelor, sucurilor de fructe etc.), industria textilă, industria celulozei și hîrtiei, zootehnie (prepararea nutreturilor etc.), epurarea apelor reziduale și altele. La aceste ciururi, colmatarea ochiurilor sitelor, prin înțepenirea granulelor, se evită prin utilizarea dispozitivelor auxiliare (perii

* Șef lucrări dr. ing. : Șef lucrări dr. ing., catedra Utilaj tehnologic chimic

rotative, jeturi de aer produse de ajutaje, bile de cauciuc introduse în spațiul de sub sită etc.). În cazul cernerii materialelor cu granulație fină sau foarte fină, în spațiul de sub sită se poate realiza o ușoară depresiune, iar în cazul materialelor cu umiditate mai mare se poate produce încălzirea sitei.

Caracterizarea regimului vibrator al sitei

Pentru ciurul cu ruliu [7] a cărui schemă este prezentată în figura 1, traiectoria centrului sitei, sub acțiunea maselor neechilibrate rotitoare, are ecuația

$$x_s^2 + y_s^2 = r_s^2, \tag{1}$$

unde x_s, y_s sînt coordonatele centrului sitei, măsurate într-un sistem fix de referință $Oxyz$ (fig. 1); r_s — raza cercului după care se deplasează centrul sitei, a cărei expresie se prezintă sub forma [5]

$$r_s = \left| \frac{L_s(l_1 - l_2)\, me\omega^2}{(J_2 - J_1)\omega^2 - \left(nk_H L^2 + \frac{n}{2} k_v R^2 - lG\right)} \right|; \tag{2}$$

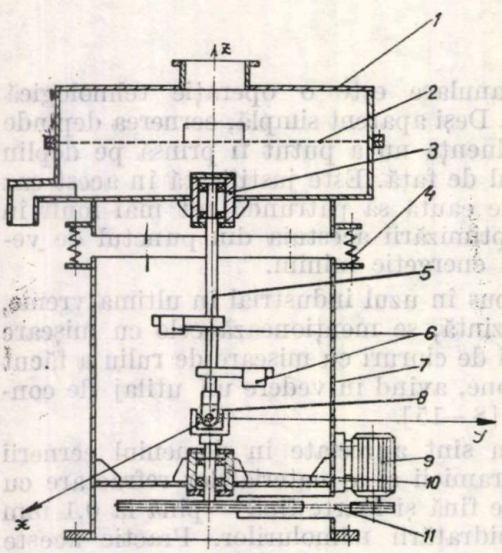


Fig. 1 — Ciur cu mișcare de ruliu 1 — carcasa sitei; 2 — sita; 3 — casetă superioară rulmenți; 4 — arcuri de reazem; 5 — arbore condus; 6 — mase excentrice neechilibrate; 7 — suport; 8 — cuplaj cardanic; 9 — motor electric; 10 — casetă inferioară rulmenți; 11 — transmisie cu curele trapezoidale.

L_s — coordonata centrului sitei în lungul axei Oz; l_1, l_2 — coordonatele centrelor maselor neechilibrate, măsurate în lungul axei Oz: m — masa greutăților neechilibrate (considerate egale) și în același plan longitudinal; e — excentricitatea maselor neechilibrate (considerată aceeași la ambele mase); ω — viteza unghiulară a arborelui condus al utilajului (întrucît mișcarea se transmite la arborele condus al mașinii prin intermediul unui cuplaj cardanic, viteza unghiulară ω a acestuia variază între valorile $\omega_{min} = \omega \cdot \cos\gamma$ și $\omega_{max} = \omega/\cos\gamma$, unde γ este semiunghiul la vîrf al conului după care se mișcă arborele condus, calculat cu formula [5]

$$\gamma \approx \frac{L_s}{r_s} = \left| \frac{(l_1 - l_2)\, me\omega^2}{(J_2 - J_1)\omega^2 - \left(nk_H L^2 + \frac{n}{2} k_v R^2 - lG\right)} \right|; \tag{3}$$

deoarece unghiul γ este mic — aproximativ 4—6° — , viteza unghiuară se poate considera constantă în timpul unei rotații complete); J_1, J_2 — momentele de inerție ale sistemului mobil [1,5]; n — numărul arcurilor de rezemare elastică a sistemului vibrator; k_H, k_V — constantele elastice, longitudinală și transversală, ale arcurilor rezemării elastice; L — coordonată, în lungul axei Oz, a planului capetelor superioare ale arcurilor; R — raza circumferinței capetelor arcurilor, considerate verticale; l — coordonata, în lungul axei Oz, a centrului de masă al sistemului mobil; G — greutatea sistemului mobil.

În timpul mișcării sistemului mobil, un punct OP al sitei ajunge, la un moment dat, în poziția P' (fig. 2). Se consideră un sistem de referință, legat de sită, C_sXYZ. Coordonatele punctului P' față de sistemul de referință fix sînt [5]

$$x = -r_s \cos\gamma\cos\omega t + \sqrt{r^2\cos^2(\alpha-\omega t)\cos^2\gamma + r^2\sin^2(\alpha-\omega t)}\cdot\cos\alpha;$$

$$y = -r_s\cos\gamma\sin\omega t + \sqrt{r^2\cos^2(\alpha-\omega t)\cos^2\gamma + r^2\sin^2(\alpha-\omega t)}\cdot\sin\alpha; \quad (4)$$

$$z = L_s - r_s\gamma + r\cos(\alpha-\omega t)\sin\gamma.$$

În relațiile (4) s-au notat; r — raza circumferinței pe care se află punctul P, măsurată pe suprafața sitei, considerată nedeformată (se neglijează aici vibrațiile proprii ale pînzei sitei; α — unghiul sub care se găsește P față de axa Ox a sistemului fix de referință; t — timpul curent.

Ținînd seamă că unghiul γ este mic, așa cum s-a precizat anterior, relațiile (4) devin ($\sin\gamma \approx \gamma$; $\cos\gamma \approx 1$)

$$\begin{aligned} x &= r_s\cos\omega t + r\cos\alpha; \\ y &= -r_s\sin\omega t + r\sin\alpha; \\ z &= L_s - r_s\gamma + r\gamma\cos(\alpha-\omega t), \end{aligned} \quad (5)$$

sau

$$\begin{aligned} x &= -r_s\cos\omega t + X; \\ y &= -r_s\sin\omega t + Y; \\ z &= Z + (X\cos\omega t + Y\sin\omega t)\gamma, \end{aligned} \quad (6)$$

unde

$$X = r\cos\alpha; \quad Y = r\sin\alpha; \quad Z = L_s - r_s\gamma. \quad (7)$$

Se remarcă ușor că fiecare punct al sitei descrie o mișcare spațială de ecuație

$$\frac{\gamma}{r_s}(xX + yY) - z - \frac{r^2}{r_s}\gamma - Z = 0 \quad (8)$$

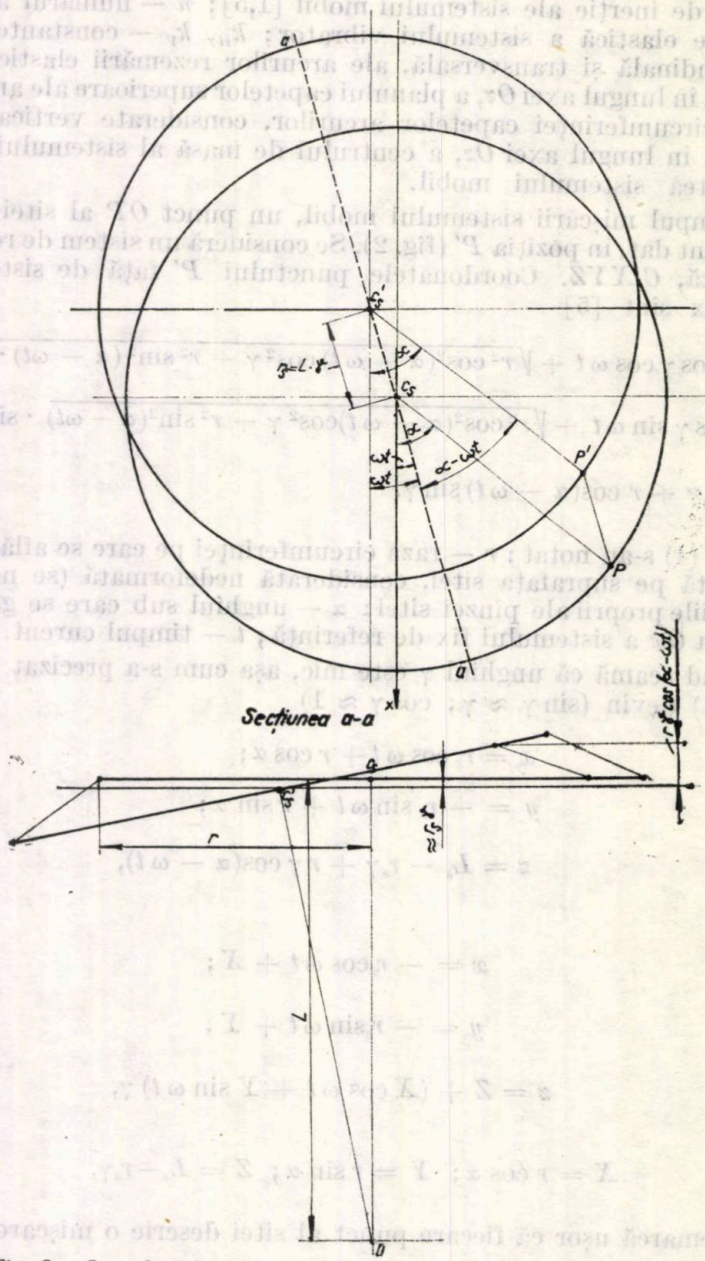


Fig. 2 — La calculul coordonatelor unui punct de pe sită, în timpul funcționării în regim staționar

obținută prin eliminarea lui cos ωt și sin ωt în expresiile (6). Cosinusurile directoare ale planului (8) se prezintă sub forma

$$\cos \alpha_x = \frac{\gamma r \cos \alpha}{\sqrt{\gamma^2 r^2 + r_s^2}}; \quad \cos \alpha_y = \frac{\gamma r \sin \alpha}{\sqrt{\gamma^2 r^2 + r_s^2}}; \tag{9}$$

$$\cos \alpha_z = \frac{r_s}{\sqrt{\gamma^2 r^2 + r_s^2}}.$$

Egalitatea (8) mai poate fi pusă, în acest fel, și sub forma

$$x \cos \alpha_x + y \cos \alpha_y + z \cos \alpha_z + p = 0, \tag{10}$$

unde s-a notat

$$p = -\frac{\gamma r^2 + Z r_s}{\sqrt{\gamma^2 r^2 + r_s^2}}. \tag{11}$$

Din analiza expresiilor de mai sus se constată că punctul P descrie o traiectorie circulară de rază r_s în plan orizontal, peste care se suprapune o oscilație verticală proporțională cu raza la care este plasat punctul considerat (o elipsă basculantă).

Componentele vitezei punctului P al sitei sînt

$$\begin{aligned} v_x &= r_s \sin \omega t; \\ v_y &= -r_s \omega \cos \omega; \\ v_z &= -r\gamma\omega \sin(\alpha - \omega t). \end{aligned} \tag{12}$$

Modulul vitezei rezultate $\bar{v}$ este

$$v = \omega \sqrt{r_s^2 + r^2 \gamma^2 \sin^2(\alpha - \omega t)},$$

iar unghiul de înclinare a vectorului $\bar{v}$ față de planul orizontal este

$$tg\, \beta_v = \frac{r\gamma}{r_s} \sin(\alpha - \omega t).$$

Modulul vitezei maxime a punctelor aflate pe cercul $r = \text{ct.}$ are valoarea constantă dată de relația

$$v_m = \omega \sqrt{r_s^2 + r^2 \gamma^2}, \tag{14}$$

iar pentru punctele aflate pe semidreapta $C_s P$ (fig. 2), v_m are o variație hiperbolică, exprimată prin formula

$$\frac{v_m^2}{\omega^2 r^2 \gamma^2} - \frac{r_s^2}{r^2 \gamma^2} = 1. \tag{15}$$

Componentele acceleraţiei punctului P pe axele sistemului fix de referinţă sînt

$$a_x = r_s \omega^2 \cos \omega t;$$
$$a_y = r_s \omega^2 \sin \omega t; \tag{16}$$
$$a_z = - r_s \gamma \omega^2 \cos (\alpha - \omega t).$$

Modulul acceleraţiei rezultante $\bar{a}$ se prezintă sub forma

$$a = \omega^2 \sqrt{r_s^2 + r^2 \gamma^2 \cos^2 (\alpha - \omega t)}, \tag{17}$$

iar unghiul de înclinare a vectorului $\bar{a}$ faţă de planul orizontal este dat de formula

$$\operatorname{tg} \beta_a = \frac{r \gamma}{r_s} \cos (\alpha - \omega t). \tag{18}$$

Modulul acceleraţiei maxime a punctelor aflate pe circumferinţa de rază $r = \text{ct.}$ are aceeaşi valoare, dată de relaţia

$$a_m = \omega^2 \sqrt{r_s^2 + r^2 \gamma^2}, \tag{18}$$

iar pentru punctele aflate pe semidreapta $C_s P$ (fig. 2), a_m, are o variaţie hiperbolică, exprimată prin formula

$$\frac{a_m^2}{r^2 \gamma^2 \omega^4} - \frac{r_s^2}{r^2 \gamma^2} = 1. \tag{19}$$

Factorul de aruncare a granulelor de material de pe suprafaţa sitei se exprimă sub forma (în regim staţionar de funcţionare)

$$\Phi = \frac{r \gamma \omega^2}{kg} \cos(\alpha - \omega t), \tag{20}$$

avînd valoarea maximă

$$\Phi_{\max} = \frac{r \gamma \omega^2}{kg}. \tag{21}*$$

În situaţia în care $\Phi < \Phi_{\max}$, se constată că materialul granular nu se desprinde de pe sită, cernerea realizîndu-se prin lunecarea acestuia. Pentru punctele aflate pe circumferinţe caracterizate de raze mai mari de cea stabilită cu formula (pentru $\Phi = 1$)

$$r = \frac{kg}{\gamma \omega^2} = k r_{\text{teoretic}} \tag{22}$$

cernerea se realizează prin aruncarea materialului. În relaţiile (20) — (22) factorul k ţine seama de natura materialului poligranular, de umiditatea acestuia, de capacitatea de încărcare electrostatică, de coezivitatea granulelor, de grosimea stratului, de amplitudinea vibraţiilor proprii ale sitei etc. Pentru materiale „nedificile" din punct de vedere al cernerii (nisip cuarţos, granule de material polimeric, de exemplu) se apreciază pentru k valoarea egală cu unitatea. În cazul unor materiale „dificile" valoarea coeficientului k este supraunitară şi urmează a se determina experimental, pentru fiecare caz în parte. Se apreciază, în acest fel, că trecerea de la lunecarea

* g — acceleraţia gravitaţiei,

materialului la starea de aruncare a acestuia de pe suprafața sitei cu mișcare de ruliu nu se realizează pe o circumferință fixă, ci pe o zonă inelară, cu extinderea radială proporțională cu comportarea „dificilă" la cernere a granulelor.

Determinări experimentale

Pentru stabilirea distribuției traiectoriilor, vitezelor și accelerațiilor unor puncte ale cadrului sitei cu mișcare de ruliu aflată în dotarea Laboratorului Catedrei de Utilaj Tehnologic Chimic din Institutul Politehnic București s-a utilizat aparatura corespunzătoare de tip Brüel & *Kjaer*. Modelul experimental testat are sita circulară, cu diametrul de 600 mm, și este antrenată de un motor de curent continuu. Generatoarele de vibrații sînt cu mase excentrice neechilibrate, iar sistemul mobil este rezemat pe opt arcuri cilindrice elicoidale, cu diametrul sîrmei de patru milimetri.

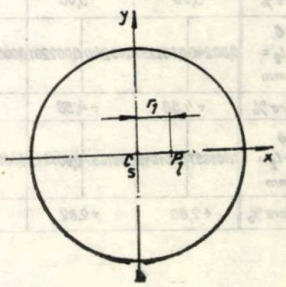
Rezultatele măsurărilor efectuate în două puncte distincte P_1 și P_2 sînt prezentate sintetic în tabelele 1 și 2. În aceleași tabele sînt expuse și rezultatele teoretice calculate cu formulele corespunzătoare, deduse anterior (în acest czz s-a considerat că punctele P_1 și P_2 se află pe axa Ox a sistemului de referință, astfel că $\alpha = 0$).

Tabelul 1

Comparație între valorile calculate și cele măsurate pentru deplasările, vitezele și accelerațiile punctului P_1.

$l = 0{,}545\ m$
$r_1 = 0{,}075\ m$
$\omega = 30{,}58\ s^{-1}$

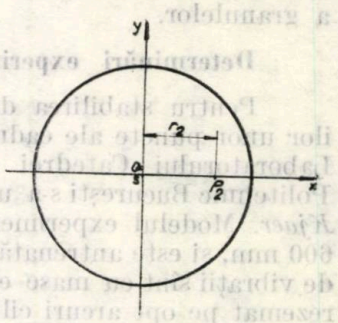
$r_{CAB} = 0{,}0031160\ m$ $\quad \gamma_{AB} = 0{,}005717\ rad$
$r_{CBB} = 0{,}0022291\ m$ $\quad \gamma_{BB} = 0{,}004203\ rad$
$r_{CCB} = 0{,}001649\ m$ $\quad \gamma_{CB} = 0{,}003025\ rad$



Regimul de funcționare	Punctul P_2																	
	Deplasări [m]						Viteze [m/s]						Accelerații [m/s²]					
	S_x		S_y		S_z		V_x		V_y		V_z		a_x		a_y		a_z	
	măs.	calc.	măs.	calc.	măs.	calc.	măs.	calc.	măs.	calc.	măs.	calc.	măs.	calc.	măs.	calc.	măs.	calc.
AB $d = l_1 - l_2 = 160\ mm$	0,00296	0,003116	0,00296	0,003116	0,00155	0,001629	0,09192	0,09528	0,09192	0,09528	0,04467	0,04381	2,9698	2,9138	2,9698	2,9138	1,4142	1,5233
Abatere %	-5,00		-5,00		-4,84		-3,52		-3,52		-6,22		+1,88		+1,88		-7,162	
BB $d = l_1 - l_2 = 118\ mm$	0,002240	0,002291	0,002240	0,002291	0,001131	0,001131	0,0763	0,0700	0,0777	0,0700	0,03535	0,03660	2,4041	2,1423	2,4041	2,1423	1,2020	1,11935
Abatere %	-4,58		+4,58		-5,51		+8,25		+3,90		-3,41		+10,88		+10,88		-6,87	
CB $d = l_1 - l_2 = 85\ mm$	0,001637	0,001649	0,001637	0,001649	0,000918	0,000862	0,05565	0,05042	0,05565	0,05042	0,02828	0,02635	1,720	1,5420	1,692	1,5420	0,8485	0,806
Abatere %	+2,82		+2,83		+6,20		+10,86		+10,86		+6,82		+10,34		+8,86		+5,00	

Tabelul 2

Comparație între valorile calculate și cele măsurate pentru deplasările, vitezele și accelerațiile punctului P_2



$l = 0{,}545\,m$
$r_2 = 0{,}285\,m$
$\omega = 30{,}58\,s^{-1}$
$r_{CAB} = 0{,}003116\,m$ $\gamma_{AB} = 0{,}805717\,rad$,
$r_{CBB} = 0{,}002291\,m$ $\gamma_{BB} = 0{,}004203\,rad$
$r_{CCB} = 0{,}001649\,m$ $\gamma_{CB} = 0{,}003025\,rad$

Regimul de funcționare	Punctul P_1																	
	Deplasări [m]						Viteze [m/s]						Accelerații [m/s²]					
	S_x		S_y		S_z		V_x		V_y		V_z		σ_x		σ_y		σ_z	
	măs.	calc.	măs.	calc.	măs.	calc.	măs.	calc.	măs.	calc.	măs.	calc.	măs.	calc.	măs.	calc.	măs.	calc.
AB $d = l_1 - l_2 = 160\,mm$	0,002364	0,003116	0,002364	0,003116	0,000385	0,00428	0,09192	0,09528	0,09192	0,09528	0,01272	0,01308	2,9698	2,9138	2,9698	2,9138	0,4101	0,400
Abatere %	−5,00		−5,00		−7,71		−3,52		−3,52		−2,75		+1,88		+1,88		+2,41	
BB $d = l_1 - l_2 = 118\,mm$	0,002400	0,002291	0,002400	0,002291	0,000296	0,000315	0,0777	0,0700	0,0763	0,0700	0,01106	0,009632	2,4041	2,1423	2,4041	2,1423	0,3111	0,2945
Abatere %	+4,58		+4,58		−6,03		+9,90		+8,25		+9,13		+10,88		+10,88		+5,33	
CB $d = l_1 - l_2 = 85\,mm$	0,001697	0,001649	0,001697	0,001649	0,000212	0,000225	0,05856	0,05042	0,05856	0,05042	0,007636	0,006311	1,692	1,5420	1,720	1,5420	0,2262	0,21134
Abatere %	+2,82		+2,82		−5,77		+10,86		+10,86		+9,49		+8,86		+10,34		+6,56	

Concluzii

Lucrarea analizează regimurile vibratoare ale ciururilor cu mișcare de ruliu de concepție proprie, prezentînd distribuțiile de traiectorii, de viteze și de accelerații ale punctelor de pe suprafața sitei, care constituie organul activ al mașinii. Acest lucru este necesar pentru stabilirea zonelor în care materialul poligranular este cernut prin *lunecarea* pe sită sau prin *aruncarea* acestuia. Totodată se prezintă indicații referitoare la comportarea materialelor, condiționată de caracteristicile proprii și de cele ale sitei, în vederea protejării acestora în procesul cernerii (valori mari ale factorului de aruncare exprimă în același timp și pericolul de sfărîmare a granulelor, în special pentru materiale friabile).

Cercetările experimentale efectuate pe model arată o bună concordanță a rezultatelor teoretice cu cele practice.

Lucrarea evidențiază pe parcursul său și alte aspecte referitoare la procesul cernerii cu site cu mișcare de ruliu, ce pot fi aprofundate în cercetări ulterioare (ca de exemplu vibrațiile proprii ale sitei, stabilirea valorilor coeficientului k pentru diferite materiale etc.).

BIBLIOGRAFIE

1. *R. I. Iatan M. Renert*, Buletinul IPB, 33, nr. 6, 1971, p. 79—91.
2. *R. I. Iatan*, Buletinul IPB, 34, nr. 2, 1972, p. 85—92.
3. *R. I. Iatan, Gh. Ene*, Considerații asupra dinamicii ciururilor cu ruliu și al transportului materialului pe sită, Sesiunea științifică INCERC, 13—15 martie 1975, Cluj-Napoca.
4. *R. I. Iatan, Gh. Ene*, Revista de chimie, 27, nr. 1, 1976, p. 44—48.
5. *Gh Ene*, Dinamica materialelor granulare corelată cu dinamica particulei individuale cu aplicație la ciururile cu ruliu, teză de doctorat, Institutul Politehnic București 1984.
6. M. *Munteanu, R. I. Iatan, Gh Ene*, Dinamica mașinilor vibratoare de tip pendul sferic inversat, cu mișcare de balans, Revista de chimie nr. 10, 1985.
7. *R. I. Iatan, M. Renert, I. Gueron, Gh. Ene*, Ciur cu mișcare de ruliu, brevet de invenție, RSR, nr. 67497/1978.
8. *P. Schmidt*, Aufbereitungstechnik, 6, nr. 10, 1965, p. 496—600.
9. *P. Schmidt*, Aufbereitungstechnik, 7, nr. 5, 1966, p. 265—273.
10 *P. Schmidt*, Chemische Technik, 21, nr. 4, 1969, p. 220—225.
11 *T. Kanzleiter*, Aufbereitungstechnki, 12, nr. 3, 1971, p. 119—126.
12. *T. Kanzleiter*, Chimie ingenieur Technik, 42, nr. 5, 1970, p. 225—258.
13. *T. Kanzleiter*, Aufbereitungstechnik, 14, nr. 7, 1973, p. 411—413.
14. *P. Schmidt*, Aufbereitungstechnik, 14, nr. 7, 1973, p. 411—413.
15. *P. Schmidt*, Aufbereitungstechnik, 21, nr. 7, 1980, p. 337—345.
16. *P. Iohn*, Aufbereitungstechnik, 12, nr. 2, 1971, p. 70.

Theoretische und experimentelle Untersuchungen über die Dynamik des Taumelsiebes

Für ein Taumelsieb eigener Bauart werden Beziehungen für die Berechnung der Verteilung der Körnerbahnen sowie der entsprechenden Geschwindigkeiten und Beschleunigungen aufgesellt. Es werden ferner die Gebiete ermittelt in dener der Körnerbaufen auf dem Sieb gleitet bzw. die Gebiete in denen die Körner Wurfbahnen folgen. Die theoretisch ermittelten Ergebnisses werdwn den experimentellen gegenübergestellt, wobei sich die Übereinstimmung als gut erweist. Theoretische und experimentelle Möglichkeiten werdwn aufgezeigt, die Vorgänge auf dem taumelsieb weiter zu vertiefen.

BOOKS

G. C. Moisil, E. Curatu, OPTICĂ. TEORIE ŞI APLICAŢII / Opitcs. Theory and Applcations Editura Tehnică, Bucureşti, 1986, 523 p.

Description of basic optical phenomena implies the fact that propagation of electromagnetical field is a relativistic process and theoretical optics relies on relativistic electrodynamics.
The authors present in detail the polarization state of light, as well as light propagation into anisotropic medium. They also advance several concepts of quantum theory of radiation which are necessary to explain light microscopic structure and interaction between radiation and substance.
The second part of the booh presents the most important chapters of practical optics and namely photometry, colourimetry, light sources and receivers, as well as optical materials,devices and instruments. A greater importance is given to optical components (lenses, polarizing prisms, opto-electronic components), as well as optical apparatus such as interferometers, lasers optical philters, spectral outfits, elipsometrical devices, holographic devices. As for image formation by optical systems, they employ diffractional methods on basis of Fourier analysis.

V. Olariu, V. Prepeliţă, TEORIA DISTRIBUŢIILOR, FUNCŢII COMPLEXE ŞI APLICAŢII/ Distribution Theory, Complex Functions and Applications, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti 1986, 503 p.

Contents : Periodical distributions ;
- Introduction into the theory of probabilities ;
- Complex analysis ;
- Orthogonalization. Integral transformations ;
- Differential equations ;
- Partially derivative equations.

This material is supposed to demonstrate how distribution theory and theory of complex variable function are implied into mathematical modelling leading to differential equations or partial derivatives.

T. Creţu, FIZICA GENERALĂ. vol. II / General Physics, vol. II, Editura Tehnică, Bucureşti, 1986, 492 p.

This volume is a continuation of an early presentation of the main chapters of physics and contains :
- origins of quantum physics ;
- elements of quantum mechanics ;
- elements of atomic and molecular physics ;
- fundamentals of solid state physics ;
- concepts of nuclear — and elementary particles physics ;
- concepts of plasma physics ; thermonuclear reactions.

This theoretical knowledge can be applied to the following research fields : achievement of thermonuclear guided reactions ; superconductor materials at high temperatures, metallic hydrogen manufacturing, surface physics, substance behaviour in very high magnetic fields, study of huge molecules and liquid crystals overcharged elements and ,,exotic'' nuclea.

M. Munteanu, INTRODUCERE ÎN DINAMICA MAȘINILOR VIBRATOARE / **Introduction** in the dynamics of vibrating machines, Editura Academiei R.S.R., **București, 1986, 320 p.**

Contents:

1. Generalities. The principal elements of the vibrating machines (General considerations on the vibrating machines; Generation of vibrations: Elastic elements used in the construction of vibrating machines).
2. Single-mass vibrating machines with kinematic drive (Vibrating machines with linear elastic elements; Vibrating machines with connecting rods; Vibrating machines with nonlinear elastic elements).
3. Single — mass vibrating machines driven by vibration generators with unbalanced masses.
4. Vibrating machines driven by electromechanical and electrodynamical vibration generators.
5. Two-mass vibrating machines.

TEZE DE DOCTORAT SUSȚINUTE ÎN 1986—1987

Gheorghe Dan Pasat — Optimizarea dispozitivelor de amestecare ale reactoarelor chimice și biochimice de gabarit mare (22.X.1986) Conducător științifică prof. dr. ing. Mihail Renert

Cristian Crăciunoiu — Analiza și sinteza optimală a mecanismelor perforatoarelor de bandă (14.XI.1986) Conducător științific prof. dr. docent Nicolae Manolescu

Zoe Lucia Atanasiu — Contribuții la analiza și sinteza mecanismelor din industria de încălțăminte (28.XI.1986) Conducător științific acad. Radu Voinea

Paul Precupețu — Contribuții la sinteza mecanismelor de lansare a suveicii de la mașinile clasice de țesut (19.II.1987) Conducător științific prof. dr. docent Nicolae Manolescu

George Dobre — Contribuții privind influența factorilor constructivi și tribologici asupra reducerii zgomotului angrenajelor cilindrice (13.III. 1987) Conducător științific prof. dr. docent Dan Pavelescu

C. 1283 I. P. Informația

40.480

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
ELECTROTEHNICA, ENERGETICA, AUTOMATICA-CALCULATOARE, ELECTRONICA, MECANICA, CONSTRUCŢII DE MAŞINI TRANSPORTURI-AERONAVE, CHIMIE, METALURGIE

apare în continuarea vechilor periodice ştiinţifice : „Bulletin de Mathématiques et de Physiques pures et appliquées", „Buletinul Politehnicei din Bucureşti" şi „Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti".

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea ştiinţifică a corpului didactic din institut. În limita spaţiului disponibil, se pot publica şi lucrări ştiinţifice ale colaboratorilor din afara institutului.

Corespondenţa privind articolele, schimburile de publicaţii şi abonamentele se fac pe adresa institutului.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
ЭЛЕКТРОТЕХНИКА, ЭНЕРГЕТИКА, АВТОМАТИКА-СЧЕТНО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ, ЭЛЕКТРОНИКА, МЕХАНИКА, МАШИНОСТРОЕНИЕ, ТРАНСПОРТ—САМОЛЕТОСТРОЕНИЕ ХИМИЯ, МЕТАЛУРГИЯ

продолжает прежних научных периодических журналов „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées", „Buletinul Politehnicei din Bucureşti" и „Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti".

Составленный на новых основах он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского политехнического института. В пределах возможностей будут опубликоваться и научно-исследовательские работы специалистов извне.

Переписка, обмен периодическими изданиями и подписка производятся по адресу института.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
ELECTROTECHNICS, ENERGETICS, AUTOMATIC CONTROL-COMPUTERS, ELECTRONICS, MECHANICS, MACHINE BUILDING, TRANSPORT-AERONAUTICS, CHEMISTRY, METALLURGY

The Bulletin continues the old scientific periodicals : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées", „Buletinul Politehnicei din Bucureşti" and „Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti".

Organized on a new basis, it primarily reflects the scientific activity of the academic staff from Institute. Researchers from outside the institute can also publish their papers within the available space.

The correspondance regarding the articles, change of publications and subscriptions are sent to the following address.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
ELECTROTECHNIQUE, ENERGETIQUE, AUTOMATIQUE-ORDINATEURS, ELECTRONIQUE, MECANIQUE, CONSTRUCTIONS MECANIQUES, TRANSPORTS-AERONAUTIQUE, CHIMIE, METALLURGIE

continues les anciens périodiques scientifiques : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées", „Buletinul Politehnicei din Bucureşti" et „Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti".

Organisé sur de nouveaux principes il reflète tout d'abord l'activité scientifique du corps enseignant de l'Institut. Dans la limite de l'espace disponible on peut y publier aussi les travaux scientifiques des collaborateurs de l'extérieur.

L'adresse pour la correspondance concernant les articles, les échanges de publications et les abonnements est :

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
ROMÂNIA

Splaiul Independenţei nr. 313
Căsuţa Poştală nr. 2356

Lei 35